

O estudante da Educação Básica como pesquisador: investigando e fazendo matemática

Luciana Parente Rocha¹

Marcos Antonio Gonçalves Júnior²

Míriam do Rocio Guadagnini³

Renato Sardinha⁴

Resumo

Este artigo relata a criação e o desenvolvimento do projeto de ensino “Investigação Matemática em Sala de Aula: o aluno como pensador autônomo”, desenvolvido em turmas de quintos e sextos anos do Ensino Fundamental. Pensado em 2015, tal projeto visou mudar a estrutura curricular das referidas séries, bem como o modo de pensar e de ser professor de matemática. A experiência vivenciada nas aulas do projeto, especialmente por meio das estratégias da Investigação Matemática e da Resolução de Problemas, tem mostrado a possibilidade de o professor abandonar o papel central dentro da aula, com o intuito de superar o paradigma do exercício, colocando o estudante como centro do processo de ensino e aprendizagem. As aulas acontecem em um laboratório de Educação Matemática, partindo de tarefas autorais dos docentes, nas quais os alunos são convidados a investigar, conforme exemplos apresentados. Conclui-se que o projeto leva os estudantes a desenvolverem autonomia, habilidades de escrita, oralidade, criticidade e de saber ouvir. Além disso, tem se mostrado uma importante ferramenta no sentido de mobilizar “o duvidar”, o “questionar mais”, mostrando como o estudante pode cultivar sua curiosidade matemática e construir o hábito da investigação, concebendo a matemática como algo que pode “fazer”, descobrir e “inventar”.

Palavras-chave: Investigação matemática em sala de aula, resolução de problemas, laboratório de educação matemática, ensino fundamental, educação matemática.

The Basic Education student as a researcher: investigating and doing mathematics

Abstract

This paper refers to the creation and development of the teaching project, “Mathematical Investigation in the Classroom: the student as an independent thinker”, in fifth and sixth year classes of Elementary School. Created in 2015, this project aims to change the curricular structure of the aforementioned series, as well as the way of thinking and being a Mathematics teacher. The experience in the project classes, especially through mathematical investigation and problem solving strategies, has shown the possibility for the teacher to abandon the central role within the class, with the aim of overcoming the exercise paradigm, placing the student as the center of the teaching and learning process. Classes take place in a Mathematics Education laboratory, based on tasks authored by teachers, in which students are invited to investigate, according to the examples presented. It is concluded that the project leads students to develop autonomy, writing, speaking, criticality and listening skills. Furthermore, an important tool was shown to mobilize “doubt”, “question more”, showing how students can cultivate their curiosity and build the habit of investigation, conceiving mathematics as something they can “do”, discover and “invent”.

Key-words: Classroom mathematical investigation, Problem Solving, Mathematics education laboratory, elementary education, Mathematics Education.

¹ Mestre em Educação (Unicamp). Professora de matemática na Educação Básica no Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE) da Universidade Federal de Goiás (UFG). E-mail: luciana_rocha@ufg.br.

² Doutor em Educação (Unicamp). Professor de matemática na Educação Básica no Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE) da Universidade Federal de Goiás (UFG) e professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (PPGEEB/CEPAE/UFG). E-mail: margonjúnior@ufg.br.

³ Doutora em Educação Matemática (UNIAN). Professora de matemática na Educação Básica no Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE) da Universidade Federal de Goiás (UFG). E-mail: miriamguadagnini@ufg.br.

⁴ Doutor em Educação em Ciências e Matemática (Universidade Federal de Goiás/UFG). Professor efetivo da Faculdade de Educação da UFG. E-mail: rensardinha@ufg.br.

Introdução

O presente artigo tem por propósito narrar a criação e o desenvolvimento de um projeto de ensino intitulado "Investigação Matemática em Sala de Aula: o aluno como pensador autônomo" (Universidade Federal de Goiás, 2015), envolvendo estudantes dos quintos e sextos anos do Ensino Fundamental do Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação (CEPAE), unidade acadêmica de Educação Básica da Universidade Federal de Goiás (UFG).

O referido projeto, iniciado em 2015, organizado por docentes do Departamento de Matemática do CEPAE, propõe colocar o estudante diante de situações nas quais ele precisará "fazer matemática" para melhor compreendê-las, explicá-las e resolvê-las, aproximando-se, assim, de um trabalho de iniciação científica em sala de aula. Esse "fazer matemática" por parte do estudante significa, por vezes, utilizar conhecimentos que já possui, trabalhar esses conhecimentos, desenvolvendo-os em função da situação, como também descobrir conhecimentos matemáticos já existentes e, ainda, "inventar" matemáticas, no sentido de criar técnicas e artifícios próprios, novos para ele mesmo, a fim de lidar com a situação.

A seguir, abordaremos os trâmites que nos permitiram levar a cabo o projeto, bem como o processo de pesquisa-ação colaborativa em que nos envolvemos, culminando, inclusive, na criação de um grupo de pesquisa. Na sequência, apresentamos dois exemplos de tarefas investigativas que foram desenvolvidas nas turmas de quintos e sextos anos, respectivamente: "Par e Ímpar" e "A Misteriosa Cruz do Calendário" e, por fim, tecemos considerações sobre o trabalho realizado dentro do referido projeto.

Uma história de transformação das nossas práticas como professores de matemática

Inicialmente, é preciso afirmar que não somos contrários ao uso de exercícios de matemática em sala de aula e às estratégias de ensino nas quais o professor expõe o conteúdo, pois essas são estratégias que podem gerar aprendizagens. Porém, como é evidente em nossa própria experiência como estudantes, mas também como professores da Educação Básica e do Ensino Superior, e como mostra a literatura em Educação Matemática (Fiorentini, 1995), o "paradigma do exercício" (Skovsmose, 2000) tem dominado as práticas de ensino de matemática, limitando sobremaneira o trabalho dos

estudantes, relegando-os a meros reprodutores do "passo-a-passo" da resolução de "exercícios algorítmicos" (Butts, 1997), diminuindo a matemática a um conjunto de regras a serem obedecidas. Como afirma Goldenberg, ao

[...] lado de um rico legado de aplicações, a história multimilenar da Matemática apurou igualmente para nosso uso um corpo de métodos e modos de pensar que são tão valiosos como os factos [...] que esses modos de pensar nos ajudam a descobrir. Para a grande maioria de pessoas que esquecerão a maior parte desses factos (e nunca sentirão a sua falta), estes modos matemáticos de pensar continuam a constituir um poderoso instrumento para ver e para conseguir compreender o mundo (Goldenberg, 1999, p. 35).

Desse modo, apesar de o Departamento de Matemática do CEPAE já conter, em seu projeto político pedagógico, orientações nesse sentido, preconizando práticas de sala de aula envolvendo jogos, uso de materiais pedagógicos, resolução de problemas e investigações (Universidade Federal de Goiás, 2016), nossa percepção era a de que, ainda assim, trabalhávamos de forma isolada, normalmente no próprio ambiente da sala de aula, usando tarefas matemáticas contidas em livros didáticos, adaptando-as quando necessário. Parecíamos carecer de um processo mais amplo e estrutural de mudança curricular, calcado em resultado de pesquisas sobre a nossa própria prática. Também sentíamos falta de nos colocarmos como autores de tarefas e propositores de estratégias desafiadoras para a sala de aula, nos envolvendo em trabalhos realmente colaborativos.

Em 2015, porém, iniciamos um processo de estudo culminando na criação do Projeto de Ensino intitulado "Investigação Matemática em Sala de Aula: o aluno como pensador autônomo". Nossos estudos elucidaram que a programação de um currículo, mesmo que ele seja diferenciado, estruturado em rede (Pires, 2000), ainda exerce considerável pressão sobre o professor. E, o que é mais preocupante, tem tolhido os alunos da possibilidade de pensar com liberdade, com tempo, de estar aberto ao erro como parte do seu processo de ensino e aprendizagem, de refletir sobre o erro e retomar o caminho, modificando-o, reorganizando ideais, pensamentos, conhecimentos, confrontando o "conhecido com o conhecer" (Brousseau, 1983).

De fato, a organização curricular estáposta de modo a impingir o resultado da aprendizagem do aluno como dependente essencialmente da instrução dada pelo professor (Bosch *et al.*, 2001, p. 81). Isso não significa que o papel do professor não seja essencial, mas o fato é que temos dado pouca, ou quase nenhuma, responsabilidade ao

aluno pelo seu processo de aprendizagem e estudo. Temos, de forma taxativa, definido o quê, quando e como os alunos devem aprender, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental do CEPAE.

Não por acaso, o ritual de passagem dos Anos Iniciais para os Finais do Ensino Fundamental tem sido desafiador, pois, no CEPAE, nos primeiros anos escolares, os estudantes costumam desenvolver uma relação prazerosa com o processo de ensino e aprendizagem de maneira geral, como também com a matemática. Assim, ao invés de oferecermos, no sexto ano, a possibilidade da continuidade dessa relação com a aprendizagem, oferecemos um aumento da carga horária em diversas disciplinas que pouco dialogam entre si, um currículo de matemática extenso, repleto de algoritmos e, consequentemente, uma matemática livresca e distante de contextos próximos ou amigáveis para os estudantes.

E se pensarmos na transição dos Anos Finais do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, no CEPAE, uma grande contradição se apresenta. O Ensino Médio requer do estudante segurança em relação ao caminho que pretende seguir, a sua área de preferência, o que demanda certo grau de independência, um olhar crítico para o mundo e curioso em relação à interdisciplinaridade (Delgado *et al.*, 2009). Essa contradição nos levou aos seguintes questionamentos, contidos no projeto de ensino já citado:

Como esperar que atuem com autonomia no Ensino Médio se temos passado o tempo todo lhe dizendo o que fazer, o que aprender, quando aprender, de que modo aprender? No que se refere à transição dos alunos [...] do 5º ano e entrando no 6º, enquanto professores de matemática, temos nos perguntado: Como melhorar e fazer dialogar o ensino e a aprendizagem da matemática entre os 5ºs e 6ºs anos do Ensino Fundamental do CEPAE? (Universidade Federal de Goiás, 2015, p. 3-4).

E esses questionamentos, por sua vez, nos fizeram elencar alguns tópicos a serem pesquisados, tais como: formas de fazer com que os estudantes aprendam a matemática com compreensão; tipos de atividades e materiais didático-pedagógicos que sejam desafiantes; diferentes modos de organizar o currículo e o ambiente da sala de aula; maneiras de fazer com que os alunos reflitam sobre o seu processo de pensamento, no intuito de desenvolvê-lo; formas de ampliar a autonomia dos alunos e de instigá-los a refletir e averiguar o seu próprio pensamento matemático (Universidade Federal de Goiás, 2015).

Juntamente com esse projeto de ensino, nascia uma "pesquisa-ação-colaborativa" (Fiorentini, 2004; Nacarato, 2000; Desgagné, 2007), intitulada "Trabalho colaborativo no estágio supervisionado em docência na licenciatura em matemática: formadores, supervisores e futuros professores" (Gonçalves Júnior; Rocha; Silva, 2016), no qual nos envolvemos na produção de propostas para a sala de aula, em ciclos de pesquisa-ação: avaliação, planejamento, ação, monitoramento (Tripp, 2005). Dessa maneira, em 2020, fundamos o "Grupo de Estudos e Pesquisas *Abakós*: Práticas Formativas e Colaborativas em Educação Matemática na Escola", atualmente já cadastrado e certificado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)⁵, com duas linhas de pesquisa: "Prática pedagógica em Educação Matemática na Educação Básica"; e "Desenvolvimento profissional, formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática".

Esses projetos, de ensino e de pesquisa, nos encaminharam para uma sequência de mudanças pedagógicas, curriculares, administrativas e, sobretudo, em nossas próprias práticas profissionais. Iniciamos o projeto de ensino por uma mudança nas aulas do sexto ano, pois passamos a dedicar três das cinco aulas semanais nessa turma para propor outras práticas, especialmente a "Investigação Matemática em Sala de Aula" (Ponte, 1998; Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003) e a "Resolução de Problemas" (Polya, 1978). Essas três aulas, ministradas consecutivamente, passaram a ser realizadas no Laboratório de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática (LEPEM/CEPAE), um ambiente com mesas adequadas para o trabalho em grupo, com materiais manipuláveis como ábacos, tangrangs, entre outros.

Para dar continuidade ao processo, foi necessário pleitearmos, frente ao conselho deliberativo do CEPAE, mudanças na estrutura do horário escolar e no rearranjo da distribuição das turmas, a fim de que pudéssemos lecionar essas três aulas com a presença de dois docentes simultaneamente. Além disso, foi imprescindível produzir tarefas matemáticas, de acordo com o preconizado no projeto de ensino, e discutir o currículo do sexto ano, sua relação com os outros anos do Ensino Fundamental e com a Base Nacional Curricular Comum (Brasil, 2018).

⁵ Espelho do grupo no CNPq disponível em: dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/6059157120774781. Acesso em: 2 ago. 2023.

Entretanto, a mudança não era apenas administrativa, curricular ou didática. A transformação pela qual ainda estamos a passar estava em nós mesmos, em abandonar o papel de professor como centro da aula, como detentor de conhecimento, procurando escutar e aceitar os argumentos matemáticos dos alunos. Tratava-se de uma mudança em nosso próprio modo de ser e estar professores de matemática no CEPAE/UFG.

A Investigação Matemática em sala de aula e a Resolução de Problemas são as duas principais estratégias metodológicas dentro do projeto de ensino. Nessas abordagens, a preocupação não está somente nos conteúdos de matemática, mas também com maneiras de fazer, com a postura investigativa, com habilidade de resolver problemas, com reflexão, com tomada de decisão pautada em experimentação, em avaliação da situação e dos dados obtidos. Uma aula de resolução de problemas começa com um problema. Uma aula com investigação inicia com uma situação sobre a qual a turma irá pensar. A partir disso, em grupos ou individualmente, os alunos propõem problemas, identificam aspectos que precisam ou poderiam ser melhorados dentro das situações.

Compreendemos que essas estratégias metodológicas são conhecidas há tempos no campo da Educação Matemática. Porém, a nossa singularidade está no fato de sermos professores de matemática da Educação Básica que, ao pesquisar de forma colaborativa, nos envolvemos em um processo criativo na produção de tarefas matemáticas, na sua realização na sala de aula e na reflexão sobre a própria prática.

Chegamos a fazer uma discussão em Gonçalves Júnior, Rocha e Moraes (2017) sobre nosso posicionamento em relação à diferença entre exercícios, problemas e situações-problema. Evidentemente, temos dado foco aos dois últimos tipos. Entretanto, ainda assim, temos produzido tarefas que envolvem um enredo arrolado em uma narrativa. A elas demos o nome de "Problemas ou situações matemáticas narrativas":

são pequenas narrativas nas quais o enredo sugere uma situação repleta de ideias matemáticas. Em seu corpo, não há a apresentação de um problema explícito, ou uma pergunta direta, mas sim de uma trama, uma intriga, um mistério, uma situação inusitada que pode ser melhor compreendida ou desvendada com ferramentas matemáticas (Gonçalves Júnior; Sardinha, 2023, notas de aula).

Nem todas as tarefas criadas por nós chegam a ser "situações narrativas", embora a maioria seja. Porém, há também problemas, situações-problema e exercícios sugestivos de investigações, evidenciando padrões numéricos, entre outros. Há também problemas e situações adaptadas por nós a partir de questões encontradas em livros, sempre com indicação da autoria original. Assim, com as tarefas e situações narrativas em mãos, nossas aulas no LEPEM passaram a seguir uma dinâmica em três momentos, com os quais orientamos os estudantes, conforme Quadro 1, a seguir.

Quadro 1 – Os momentos da aula

| Momentos | Orientações aos estudantes | Frase chave do momento |
|----------|---|-------------------------------|
| 1º | Extrair os dados importantes do enunciado (situação); (Re) Formular a pergunta, com suas próprias palavras; Planejar a resolução e as ações. | “O que é pra ser investigado” |
| 2º | Olhar as pistas; Anotar; Organizar os dados; Fazer testes; Conjecturar; Testar conjecturas; Sistematizar as ideias (tabelas, listas, esquemas, etc.); Resolver. | “Vamos testar nossa ideia!” |
| 3º | Registrar as conclusões; Justificá-las (argumentando matematicamente); Compartilhar as descobertas; Ouvir o colega; Debater/conversar sobre as descobertas. | “Vamos ouvir o grupo!” |

Fonte: Gonçalves Júnior, Rocha e Moraes (2017).

Depois de alguns anos desde o início do projeto, o grupo acumulava certa experiência e foi capaz de fazer muitas reflexões sobre a prática, dentre livros, artigos, trabalhos em eventos, tais como: Gonçalves Júnior, Rocha e Moraes (2017), Souza *et al.* (2019), Gonçalves Júnior, Rocha e Sardinha (2020), Guadagnini *et al.* (2019), Amorim (2019), Souza e Soares (2019), Guadagnini *et al.* (2020), Sardinha e Rocha (2020, 2021), Ferreira (2020).

Com isso, em dois anos de projeto, fizemos uma mudança importante na organização das aulas do LEPEM, passando de uma aula tripla para uma aula dupla, apenas. Pode-se dizer que tanto o currículo como o desafio de conduzir uma aula tripla, semanal, exerceu em nós certa pressão profissional. O currículo, mesmo dentro do projeto, não poderia deixar de ser cumprido. E era muito difícil manter o engajamento dos estudantes o tempo todo, nas aulas triplas, mesmo quando eles se mostravam interessados na tarefa proposta.

Outra informação importante desse período foi a nossa percepção do impacto do projeto nos estudantes. No sétimo ano escolar, no qual o projeto ainda não acontecia, os estudantes que já o vivenciaram no sexto ano esperavam por tarefas do tipo investigativas e apresentavam um registro escrito com características dos três momentos, conforme exposto no Quadro 1.

Assim, após discussão no grupo *Abakós*, resolvemos iniciar a implantação do projeto no quinto ano, em 2018. Pareceu-nos mais adequada essa decisão devido ao fato de o currículo do quinto ano guardar muita relação com o do sexto ano e, desse modo, algumas tarefas poderiam ser adaptadas, na medida em que novas eram criadas. Com isso, promoveríamos a cultura da Investigação Matemática entre os alunos, contribuindo na transição do quinto para o sexto ano, estabelecendo uma prática estável em relação ao fazer matemática, ao investigar, ao frequentar o LEPEM, ao trabalhar de acordo com os momentos, dentre outros.

Em 2019, pudemos compilar todas as tarefas elaboradas por nós em dois livros: "Investigando na aula de matemática: livro de atividades de matemática. Ensino Fundamental, sexto ano" (Gonçalves Júnior; Rocha; Sardinha, 2019) e "Investigando na aula de matemática: livro de atividades de matemática. Ensino Fundamental, quinto ano" (Gonçalves Júnior; Sardinha; Guadagnini, 2019). São livros destinados aos estudantes, contendo, em seus elementos pré-textuais, orientações de como utilizá-los, além de uma carta de apresentação aos alunos e suas famílias. O livro do quinto ano contém dez tarefas matemáticas e o livro do sexto ano, quatorze. Ambos possuem um espaço destinado para a resolução das tarefas, de acordo com os três momentos.

Desse modo, a seguir, apresentaremos duas "situações matemáticas narrativas", em turmas de quintos e sextos anos do CEPAE, bem como mostraremos registros feitos pelos estudantes.

Par ou ímpar? O quinto ano investigando com as mãos

A tarefa seguinte, denominada "Par ou Ímpar" (Fig. 1), faz parte do livro do quinto ano, foi vivenciada em uma turma do ano de 2019, com trinta alunos e teve duração de quatro aulas de 45 minutos. Os procedimentos metodológicos utilizados para a descrição da atividade dos alunos, nessa tarefa, constituíram-se em: diário de campo dos

pesquisadores, fotografias e registro das produções nos livros e em cartazes elaborados pelos estudantes.

O objetivo dessa tarefa era levar os estudantes a reconhecerem propriedades da adição e da paridade de números naturais, uma vez que a paridade da soma depende de certa combinação da paridade das parcelas. Por exemplo, um número natural ímpar somado a outro ímpar resulta em um par. Assim, esperávamos que os estudantes discutissem as possibilidades de vencer o jogo, verificando se tudo depende da sorte ou se pode haver alguma estratégia vencedora.

Fig. 1: Tarefa Investigativa “Par ou Ímpar?”

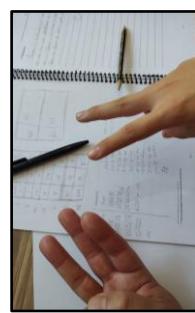
Quem já jogou par ou ímpar sabe que às vezes se ganha e, às vezes, se perde.

Miluma e Requinhos estavam jogando par ou ímpar. Miluma escolheu sempre ímpar e Requinhos, sempre par. Miluma, então, começou a anotar as jogadas para ver o que acontecia.

Da primeira vez, ela mostrou 2 dedos e Requinhos também. Requinhos ganhou. Na segunda vez, Miluma mostrou 2 dedos outra vez e seu amigo mostrou 4. Requinhos ganhou outra vez. Miluma se perguntou:

- *Toda a vez que nós dois mostramos quantidades pares de dedos, Requinhos ganha?*

Requinhos percebeu o que sua amiga Miluma tentava descobrir e começou a fazer perguntas também.



Fonte: Gonçalves Júnior; Sardinha; Guadagnini (2019, p. 39).

Inicialmente, os alunos fizeram a leitura da situação e, em seguida, solicitamos que brincassem de par ou ímpar com o colega ao lado, anotando os resultados. Na sequência, pedimos que fizessem o registro individual nos livros. Apesar das atividades no LEPEM serem realizadas em grupo, reforçamos sempre a importância de cada estudante ter o seu próprio registro.

Destacamos, no Quadro 2, as produções de dois alunos acerca do primeiro momento. E, na Fig. 2, uma produção do segundo momento.

Quadro 2: Produções de dois alunos, no 1º momento.

Produção 1 "No primeiro momento é para ser investigado por que sempre que os dois jogam quantidades pares, Requinhos (o par) ganha o jogo."

Produção 2 "É para investigar como fazer para ganhar o jogo “ímpar ou par”, Requinhos sempre ganha e Miluma perdia por que ela sempre colocava o número 2 que é par, então o Requinhos já suspeitava que ela ia colocar 2 novamente então ele fez outra jogada."

Fonte: Recorte do Caderno de Atividades.

Fig. 2: Produção de um aluno, no 2º momento.

Somar e descobrir

| | | |
|--|--|--|
| $par + par =$ $(4) + (4) =$ (8) par | $par + ímpar =$ $(4) + (3) =$ (7) $ímpar$ | $ímpar + ímpar =$ $(3) + (3) =$ (6) par |
|--|--|--|

Fonte: Recorte do Caderno de Atividades.

A princípio, a Fig. 2 pode parecer simples para o registro de um estudante. No entanto, vale lembrar que se trata de uma criança do quinto ano, buscando construir uma tabela, usando-a como suporte para investigar matematicamente. Note que, além de ter colocado um título, "somar e descobrir", indicativo da ação investigativa adotada pelo estudante, ele constrói a sua tabela em três colunas, em cada uma colocando um tipo de adição de acordo com a paridade das parcelas ("par + par"; "par + ímpar"; "ímpar + ímpar"). Trata-se de uma abordagem que pode encaminhar o estudante a fazer testes e construir uma conjectura a respeito da adição de números naturais pares e ímpares.

No segundo momento, ainda destacamos uma produção em que, a partir de seus registros, os alunos já se arriscam, buscando uma regularidade: "percebemos que toda vez que se joga par e par se vai resultar em par, quando se joga ímpar e par vai dar ímpar e jogando ímpar e ímpar se vai obter par" (*sic*). Ressaltamos a riqueza do registro, visto que ele evidencia a compreensão da proposta e, a partir da observação, identifica uma regularidade na situação.

Em relação ao terceiro momento, destacamos a seguinte produção: "Eu não consegui uma estratégia para ganhar sempre, mas consegui uma estratégia para ganhar mais, sempre escolha par, pois ele tem 2 formas de ganhar enquanto o ímpar só tem 1". Observamos que os alunos não consideraram a possibilidade "par e ímpar" e a "ímpar e par" como diferentes, o que resultaria em duas possibilidades para cada resultado (par ou ímpar), significando a mesma probabilidade para soma par e soma ímpar. Por isso, além do registro escrito, o terceiro momento também comporta um debate com a turma toda, no qual são apresentadas as resoluções e, normalmente, a maioria delas é validada ou não

pela própria turma, com a mediação dos professores. Por vezes, o debate sugere questões ou gera dúvidas em relação a certas afirmações feitas. Desse modo, orientamos os estudantes a voltarem a investigar e a procurarem elucidar essas questões e, caso a situação persista, nós intervimos, dialogando com os estudantes na tentativa de ajudá-los a desatar os “nós”.

Calendários, cruzes e sonhos: uma situação peculiar com o sexto ano

A partir de agora, apresentamos uma experiência investigativa vivenciada em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, no ano letivo de 2021. A ideia foi apresentar, aos poucos, a nossa proposta de trabalho de investigação aos estudantes, levando em conta que é importante e necessário “respeitar a inteligência da criança, observando o seu processo de crescimento intelectual e de maturação psicológica” (Sardinha; Rocha, 2022, p. 5), ao longo da realização da atividade.

Estávamos ansiosos para ver a efervescência de ideias nos grupos e a comunicação dos alunos, considerando a situação matemática narrativa que iríamos propor. Isso nos remete ao que Nacarato, Mengali e Passos (2009, p. 45) afirmam: “Quando o aluno fala, lê, escreve ou desenha, ele não só mostra quais habilidades e atitudes estão sendo desenvolvidas no processo de ensino, como também indica os conceitos que domina e as dificuldades que apresenta”. Desse modo, partimos da ideia de provocar o avanço dos estudantes e lhes apresentamos a tarefa a seguir.

Fig. 3: Tarefa Investigativa "A misteriosa cruz do calendário"

| Dom. | Seg. | Ter. | Qua. | Qui. | Sex. | Sáb. |
|------|------|------|------|------|------|------|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | |

número que estava no centro desta cruz.

- *Que coisa curiosa...*, disse Magnoliana.

Então, ela resolveu movimentar a cruz, formando novos conjuntos de cinco números. Adicionou esses números novamente e...

- *Nossa! Esse resultado também deu um número curioso.*

Assim, continuou movimentando a cruz pelo calendário e sempre encontrava esses números. Quando acordou, Magnoliana ficou aliviada:

Certa manhã chuvosa, Magnoliana acordou de um sonho estranho... Sonhou que, ao abrir a agenda do seu celular, viu o calendário do mês de abril de 2020. Nesse calendário, ela percebeu que havia uma CRUZ, que era formada por cinco dias daquele mês. Ao adicionar esses números, encontrou um resultado curioso, que tinha a ver com o

- Que sonho estranho foi esse? Eu nunca havia sonhado com calendários, muito menos com operações matemáticas, mas sonho é sonho...

Porém, ao longo do dia, aqueles números não saíram da sua cabeça. *"Qual será o mistério que possui essa cruz do calendário?"*, Magnoliana ficou se perguntando o tempo todo. *"Será que, se eu descobrir esse mistério, eu consigo saber quanto dá a soma de todos os números de uma cruz escolhida, sem precisar adicionar todos os números, um a um? Hummm..."*

Deve ter algum jeito de ajudar essa garota a desvendar esse mistério, não é mesmo? Vamos investigar!

Fonte: Recorte da Tarefa Investigativa produzida pelos professores.

A proposta desta tarefa foi explorar o senso investigativo dos estudantes, a sua capacidade de estruturação das ideias, além da oralidade e da habilidade de trabalhar em grupos. Podemos dizer que o “arranque” da aula foi a curiosidade que os alunos demonstraram ao visualizar o calendário que acompanhava o texto e a cruz formada pelos cinco números destacados.

Os alunos do sexto ano (eram vinte e cinco, naquela aula) se organizaram em grupos (cinco pessoas em cada) e seguiram os “momentos” da investigação, conforme já explicitados anteriormente neste texto. Os dois professores da turma fizeram uma leitura compartilhada da tarefa em conjunto com os alunos, deram orientações gerais sobre os “momentos” e as discussões já começaram nos grupos: “O que é mesmo para ser investigado?” “Como vamos fazer aqui?” “E agora, o que podemos utilizar para investigar?” - foram algumas das perguntas que surgiram na aula. Naturalmente, deixamos essas perguntas para que eles refletissem a respeito, tentando não interferir nos seus processos de resolução.

Observando o que nos mostra o calendário, conforme consta na Fig. 3, conclui-se que, ao adicionar os cinco números destacados, há uma relação numérica com o número que fica no centro da cruz. Porém, esta ideia ainda não era visível para muitos dos alunos, pois eles precisavam de estratégias para perceber os movimentos que são feitos na cruz e, a partir disso, tentar descobrir essa relação numérica, o que pode aparecer a partir das percepções e das discussões que são feitas nos grupos.

Ao longo da atividade, observamos como os alunos se comportavam em relação aos erros que, eventualmente, cometiam ao interpretar o enunciado, ao levantar hipóteses ou construir conjecturas. Em relação ao erro, vale refletir o que Pinto (2000, p. 12) nos

apresenta: “[...] o erro é um conhecimento; ele mostra o caminho do acerto, que já está ali implícito”.

Uma dificuldade que o professor ainda precisa lidar, em tarefas como essa, é não indicar o caminho para a solução. O seu papel, mais do que nunca, é o de fazer com que os alunos reflitam sobre as suas escolhas, estratégias, hipóteses e sobre os resultados encontrados. Assim, ele precisa controlar suas próprias ações, evitando frases como: “Faça isso, faça aquilo!” - “Busque outro caminho” - “Isso aqui está errado!”.

Os alunos trabalharam em grupos, discutiram a temática da tarefa e os professores circularam pela sala, dialogando com as crianças, escutando os seus argumentos, fazendo novos questionamentos. Assim, percebemos que houve uma efervescência de ideias, de possibilidades para encontrar uma solução ou uma justificativa plausível para a situação. Para Ponte (2017), nessa hora, o professor deve apenas gerenciar as situações de aprendizagem, sem interferir diretamente no raciocínio dos alunos, o que se torna um desafio para ambos, para quem ensina e para quem aprende.

Observando os alunos no primeiro momento da investigação, já se nota certa ansiedade para encontrar uma resposta para a situação apresentada. Isso pode levar os grupos a escolherem caminhos equivocados, sem saber o que, de fato, deveria ser investigado – faltam bons registros nessa hora para a maioria dos grupos.

No segundo momento, no qual são levantadas as hipóteses, construídas as conjecturas e traçadas as estratégias, percebemos que cada grupo criou o seu caminho, o que foi bastante produtivo para o encaminhamento da investigação. Aguardamos, então, a realização do terceiro momento, no qual os grupos comunicam as suas descobertas à turma. Nessa etapa, a criatividade e a oralidade dos alunos ficam em evidência: cada grupo quer defender com rigor os seus achados, mesmo que, em alguns casos, eles não sejam consistentes. É algo bonito de se ver, pois são crianças que têm a oportunidade de expor as suas ideias e de apresentar os seus argumentos sem serem julgadas pelos seus professores.

Por fim, queremos dizer que grande parte dos alunos conseguiu, de fato, investigar e encontrar uma solução adequada para a situação narrativa proposta na tarefa investigativa, mesmo que esse processo tenha nos indicado que ainda há muito o que ser trabalhado com essas turmas em relação a investigar e a resolver problemas e que,

também, houve alunos que não se envolveram com as discussões que foram feitas, assim como ocorre nas aulas regulares daquela turma.

Contribuições do projeto de Investigação Matemática para a Educação Básica

Ao longo desta caminhada, de aproximadamente nove anos, destacamos que as aulas do projeto de ensino (com Investigação Matemática e Resolução de Problemas) têm exercido um papel importante na aprendizagem e na formação para o exercício da cidadania dos alunos da Educação Básica do CEPAE. Os estudantes têm-se mostrado envolvidos com as habilidades mobilizadas nas aulas (leitura, interpretação, busca de soluções, capacidade de questionar, propor, trabalhar em conjunto, identificar padrões, dentre outras), revelam-se curiosos com os nomes dos personagens e as inúmeras situações matemáticas narrativas, demonstram surpresa com os enigmas por trás das brincadeiras apresentadas, sentem-se desafiados ao bancarem os “detetives” em busca das soluções e aprendem matemática de forma prazerosa.

Ressaltamos que, ainda, temos muitos desafios a serem superados em nossas aulas do projeto de ensino. Organizamos esses desafios em dois eixos: as dificuldades e os desafios dos estudantes e os dos próprios professores.

Conseguimos perceber que uma dificuldade encontrada pelos alunos tem sido a leitura e interpretação das situações apresentadas, das quais eles deveriam identificar o problema a ser resolvido ou “descobrir” a situação enigmática presente na história da tarefa, destacando a pergunta implícita na narrativa. Também ficou visível a resistência por parte de alguns deles em trabalhar em grupos, até mesmo quando a escolha dos integrantes tenha sido feita por eles próprios. Há justificativas variadas para essa não aceitação, mas o professor precisa aprender a lidar com isso.

Outro desafio, por parte dos estudantes, é sua expectativa de que haverá somente uma resposta para cada “problema ou situação matemática narrativa”. Trata-se de um desafio solapar a faina da “certeza matemática” e permitir-se vislumbrar uma matemática em seu caráter “falibilista” (Davis; Hersh, 1985), no qual a busca pode nos levar a mais de uma resolução ou solução diferente e, por vezes, até mesmo, não apresentar solução. Por fim, averiguamos, também, dificuldades dos estudantes relacionadas a escrever sua resolução, argumentando suas conclusões, matematicamente e textualmente, o que

compromete a compreensão das suas ideias para o trabalho investigativo. Saber comunicar suas ideias matemáticas é algo muito relevante dentro do projeto e é um desafio para os alunos.

Em relação aos professores, considerando que “[...] investigar matematicamente envolve a participação do aluno num processo ativo, em que seu esforço na construção do conhecimento se faz imprescindível” (Varizo; Magalhães, 2016, p. 23), nós assumimos aqui que também encontramos dificuldades para trabalhar com a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas em sala de aula. Uma das dificuldades diz respeito às expectativas que criamos sobre o interesse e a dedicação dos alunos em relação ao que estamos propondo no âmbito das tarefas investigativas. Normalmente, esperamos mais dos alunos. Outra dificuldade encontrada diz respeito ao fato de, por vezes, acabarmos por entregar aos alunos a pergunta do problema proposto, indicando o que deverá ser feito, como se o caminho e a resposta fossem únicos. Esse tipo de atitude do professor vai se modificando ao longo do tempo, até que ele consiga dialogar e estimular os seus alunos na busca de soluções para os problemas apresentados, interferindo o mínimo possível nesse processo.

Especificamente, observamos uma variação significativa em relação à produção dos alunos de quinto e sexto anos do Ensino Fundamental. No quinto ano, eles apresentam ideias enraizadas (“crenças”) de que muitos fatos que aparecem nos problemas propostos acontecem por sorte ou azar, sem compreender a aplicabilidade do raciocínio lógico-matemático nas resoluções com as quais estão trabalhando.

Já no sexto ano, os alunos apresentam mais facilidades para se organizar em grupos, realizam a troca de ideias com um grau maior de maturidade, escrevem as suas ideias com mais detalhes e de forma inteligível. Mostram, também, uma postura investigativa diante da situação proposta, percebendo que nela há um raciocínio que permeia a solução, que existe uma regra ou um padrão a se descobrir. Desse modo, eles assumem um papel crítico em relação à argumentação e à escrita deles mesmos, não aceitando qualquer resposta como “boa” ou válida, do ponto de vista matemático.

O olhar para as tarefas investigativas e para a matemática em si vai mudando com a experiência dos estudantes como investigadores. Eles começam a compreender que não podem escrever apenas a resposta final, que necessitam de argumentos adequados para

defender os seus posicionamentos, passam a questionar as respostas dadas pelos colegas e até mesmo por nós, professores e, por fim, mostram-se protagonistas da sua própria aprendizagem e da construção do seu conhecimento. Ainda, vão se tornando mais capazes de estabelecer relações entre os conceitos matemáticos enredados nas aulas do LEPEM e os explicitados na sala de aula.

Consideramos que o trabalho com a Investigação Matemática, com a Resolução de Problemas e com os "problemas e situações narrativas" que criamos tem sido importante para despertar nos estudantes a sua habilidade de trabalhar e de pensar de forma autônoma e ativa, despertando neles a criticidade, a argumentação e o interesse pelo processo investigativo em matemática. As contribuições de nosso projeto de ensino vão além das aulas de matemática, possibilitando aos alunos criarem hábitos desejáveis de verdadeiros "pesquisadores" na sala de aula, independente da disciplina cursada e do nível de ensino que se encontram.

Finalmente, como um projeto de pesquisa colaborativa, a proposta aqui apresentada depende sobremaneira da disponibilidade dos professores de se entregarem ao seu fazer pedagógico de forma plena, seja na criação e na aplicação de tarefas investigativas atraentes para os alunos, seja na sua articulação ao trabalhar com outro colega professor. Depende, também, da maturidade da reflexão sobre a própria prática que conseguimos realizar, conjuntamente. Consequentemente, isso leva o grupo a tomar decisões sobre as próximas etapas do projeto, criando novas tarefas investigativas e revendo as já desenvolvidas, pensando a educação matemática preconizada na didática das aulas, construindo a sua teorização como resultado da presente pesquisa.

Referências

AMORIM, M. V. dos S. **Árvores, carrinhos e investigações:** narrativas sobre a comunicação na sala de aula de matemática. 2019. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) -Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019. Disponível em: <http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/10318>. Acesso em: 2 ago. 2023.

FERREIRA, S. M. **Cenários para investigação matemática:** uma proposta didática para trabalhar sequências numéricas nas séries finais do Ensino Fundamental. 2020. 195 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - Universidade Federal de Goiás,

Goiânia, 2020. Disponível em: <http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/10781>. Acesso em: 2 ago. 2023.

BOSCH, M.; PEREZ, J. G.; CHEVALLARD, Y. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert. E. (org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes d'enseignement. **Recherches en didactique des Didactique des Mathématiques**, Pensée Sauvage, [S. l.], v. 2, n. 4, 1983.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DELGADO, A. F. et al. A Reforma Curricular do Ensino Médio no Cepae. **Revista Polyphonía**, Goiânia, v. 16, n. 2, p. 109-124, 2009. Disponível em: <https://revistas.ufg.br/sv/article/view/6874>. Acesso em: 12 out. 2023.

DESGAGNÉ, S. O conceito de pesquisa colaborativa: a ideia de uma aproximação entre pesquisadores universitários e professores práticos. **Revista Educação em Questão**, [s. l.], v. 29, n. 15, p. 7-35, 2007.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 1, 1995.

_____. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. (orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GOLDENBERG, E. P. et al. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P. da; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (Eds.) **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM e Projecto MPT. pp. 35-49, 1999.

GONÇALVES JÚNIOR, M. A.; ROCHA, L. P.; SARDINHA, R. **Investigando na aula de matemática**: livro de atividades de matemática: 6º ano. 1.ed. CEPAE: Goiânia, GO, 2019.

GONÇALVES JÚNIOR, M. A.; ROCHA, L. P.; SARDINHA, R. **Deixe-se contar**: histórias de aulas de matemática, colaboração e formação de professores. Goiânia: Cegraf UFG, 2020. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/688/o/ebook_deixesecontar.pdf. Acesso em: 2 ago. 2023.

GONÇALVES JÚNIOR, M. A.; ROCHA, L. P.; MORAES, M. G. Invenção e descoberta na aula de Matemática: um projeto de ensino no 6º ano do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. I.], v. 8, n. 4, p. 194–213, 2017. DOI: 10.26843/renclima.v8i4.1502. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/renclima/article/view/1502>. Acesso em: 12 set. 2023.

GONÇALVES JÚNIOR, M. A.; ROCHA, L. P.; SILVA, G. M. L. **Trabalho colaborativo no estágio supervisionado em docência na licenciatura em matemática: formadores, supervisores e futuros professores**. Projeto de Pesquisa. SAAP/UFG, 2016.

GONÇALVES JÚNIOR, M. A.; SARDINHA, R. **Problemas e situações matemáticas na transformação da sala de aula**. [Oficina de formação continuada, Goiânia-GO, 12/1/2023].

GONÇALVES JÚNIOR, M. A.; SARDINHA. R.; GUADAGNINI, M. R. **Investigando na aula de matemática**: livro de atividades de matemática: 5º ano. 1.ed. CEPAE: Goiânia, GO, 2019./Série **Educar**: Matemática, v. 25. Belo Horizonte: Editora Poisson, 2020.

GUADAGNINI, M. R. *et al.* **Uma Investigação Matemática no Ensino Fundamental**. In: Editora Poisson. (Org.). Série **Educar**: Matemática. 1ed. Belo Horizonte: Poisson, 2020, v. 25, p. 71-80.

_____. Lago Ou Praça: Uma Investigação Matemática em turmas de sexto ano do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, Mato Grosso. **Anais** [...]. Cuiabá, Mato Grosso: SBEM, 2019. v. 1. p. 1-15.

NACARATO, A. M. **A educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação**: currículo em ação de um grupo de professores ao aprender ensinando geometria. 2000. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – FE/Unicamp. Orientador: Dario Fiorentini, 2000, 323 p.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. da S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino da Matemática Elementar. Campinas-SP: Papirus, 2000.

PIRES, C. M. C. **Curriculos de matemática**: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, 1978.

PONTE, J. P. da. **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

_____. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v.7, n. 2, p. 41-70, 1998.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SARDINHA, R.; ROCHA, L. P. O recomeço: uma proposta de tarefa voltada para a investigação matemática no retorno ao ensino presencial em uma turma do Ensino Fundamental. *In:* Encontro Goiano de Educação Matemática, Engem. 8. 2022, Catalão. *Anais* [...]. 29 nov. a 1º dez. 2022, SBEM, UFCat, Catalão-GO.

_____. O mágico Somevolta e a reviravolta na sala de aula de matemática. *In:* GONÇALVES JÚNIOR; M. A.; ROCHA, L. P.; SARDINHA, R. (org.). **Deixe-se contar:** histórias de aulas de matemática, colaboração e formação de professores. Goiânia: Cegraf UFG, 2020. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/688/o/ebook_deixe-secontar.pdf. Acesso em: 2 ago. 2023.

_____. Restaurante, garçons e lugares disponíveis: um prato cheio para a Investigação Matemática na sala de aula. *In:* FARIA, Elisabeth Cristina de; GONÇALVES JÚNIOR, Marcos Antonio; MORAES, Moema Gomes (org.). **A Educação Matemática na escola: pesquisas e práticas goianas** [E-book]. Goiânia: CEGRAF/UFG, 2021. p. 1-16. Disponível em: https://publica.ciar.ufg.br/ebooks/ebook_a_educacao_matematica_na_escola/index.html. Acesso em: 2 ago. 2023.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOUZA, M. A. V.; SOARES, N. M. T. **As contribuições de um grupo colaborativo na formação de futuros professores de matemática.** 2019. (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

SOUZA, M. A. V.; SOARES, N. M. T.; ROCHA, L. P. Uma experiência com aulas investigativas em turmas de 5º E 6º anos no CEPAE/UFG. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, Mato Grosso. *Anais* [...]. Mato Grosso: SBEM, 2019. v. 1. p. 1-10.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-446, set/dez. 2005.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. CENTRO DE ENSINO E PESQUISA APLICADA À EDUCAÇÃO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – CEPAE/UFG.

Investigação Matemática em Sala de Aula: o aluno como pensador autônomo. Projeto de Ensino. 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. CENTRO DE ENSINO E PESQUISA APLICADA À EDUCAÇÃO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – CEPAE/UFG. **Projeto pedagógico do Departamento de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.** 2016.

VARIZO, Z. da C. M.; MAGALHÃES, A. P. de A. S. **Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática.** Curitiba: CRV, 2016.

Recebido em: 15 nov. 2023

Aceito em: 08 maio 2024