

# ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS POR MEIO DO ELEMENTO FINITO CORROTACIONAL CONSIDERANDO O CISALHAMENTO E DIFERENTES MATRIZES DE MASSA

## Nonlinear dynamic analysis of reticulated structures through the co-rotational finite element considering the shear and different mass matrixes

Luiz Antonio Farani de Souza <sup>1</sup>



### PALAVRAS CHAVE:

Análise dinâmica não linear;  
Formulação corrotacional;  
Matriz de massa de Timoshenko;  
Viga de Timoshenko;  
Elementos Finitos.

### KEYWORDS:

Nonlinear dynamic analysis;  
Co-rotational formulation;  
Timoshenko mass matrix;  
Timoshenko beam;  
Finite Element.

**RESUMO:** Os efeitos de segunda ordem em estruturas com alto índice de esbeltez podem desempenhar um papel importante no que concerne ao comportamento mecânico de tais estruturas, visto que implicam no aumento do risco de instabilidade. Adicionalmente, a análise estática linear pode não descrever o comportamento real de uma estrutura submetida a diversas solicitações externas, especialmente no caso de situações atípicas, como sismos e rajadas fortes de vento. Nesse contexto, uma formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos é implementada computacionalmente com o programa livre Scilab para a análise não linear dinâmica de vigas e pórticos. Os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko são utilizados para avaliar a matriz de rigidez e o vetor de força interna do sistema estrutural. O pseudocódigo do procedimento incremental e iterativo baseado nos métodos de Newton-Raphson e de Newmark é apresentado, o qual é utilizado para obter a solução aproximada da equação diferencial do movimento. Para verificar a eficácia da formulação implementada, análises dinâmicas transientes de estruturas com não linearidade geométrica encontradas na literatura são efetuadas. Além disso, são apresentadas as três primeiras frequências naturais das estruturas. Os resultados numéricos evidenciam a importância da escolha adequada da matriz de massa e da consideração do efeito de cisalhamento na rigidez do sistema estrutural, contribuindo no desenvolvimento de modelos computacionais para análise e projeto de estruturas.

**ABSTRACT:** *Second-order effects on structures with a high slenderness index may play an important role regarding the mechanical behavior of such structures, since they imply an increase in the risk of instability. Additionally, linear static analysis may not describe the real behavior of a structure subjected to various external loads, especially in the case of atypical situations, such as earthquakes and strong wind gusts. In this context, a co-rotational formulation of the Finite Element Method is computationally implemented with the free program Scilab for dynamic nonlinear analysis of beams and frames. The Euler-Bernoulli and Timoshenko beam models are used to evaluate the stiffness matrix and the internal force vector of the structural system. The pseudocode of the incremental and iterative procedure based on the Newton-Raphson and Newmark methods is presented, which is used to obtain the approximate solution of the differential equation of motion. To verify the effectiveness of the implemented formulation, transient dynamic analyzes of structures with geometric nonlinearity found in the literature are performed. Furthermore, the first three natural frequencies of the structures are presented. Numerical results show the importance of choosing the appropriate mass matrix and considering the shear effect on the stiffness of the structural system, contributing to the development of computational models for the analysis and design of structures.*

\* Contato com o autor:

Publicado em 28 de dezembro de 2023

<sup>1</sup> e-mail: [lasouza@utfpr.edu.br](mailto:lasouza@utfpr.edu.br) (L. A. F. Souza)

Engenheiro Civil, Doutor, Professor, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, em função do avanço científico e tecnológico, a realização de análises dinâmicas não lineares torna-se cada vez mais premente, haja vista a necessidade de simular o comportamento de estruturas de forma mais realista, tais como pontes rodoviárias e ferroviárias sujeitas a grandes deslocamentos, edifícios altos submetidos à ação do vento e estruturas em geral sujeitas a vibrações induzidas por abalos sísmicos (RODRIGUES e VENTURINI, 2005). Estruturas de aço são frequentemente projetadas para edifícios industriais e comerciais, porque apresentam alta relação resistência/peso e excelente ductilidade. No caso de estruturas leves e esbeltas, a influência de carregamentos dinâmicos e os efeitos de segunda ordem são mais pronunciados e, por isso, não podem ser desprezados durante a análise.

As análises estática e dinâmica têm como objetivo estudar os efeitos causados na estrutura devido à ação de uma carga solicitante. No entanto, um problema dinâmico possui natureza tempo-dependente e, assim, forças inerciais e eventuais variações temporais de carga devem ser necessariamente consideradas. Para obter as características dinâmicas de uma estrutura, podem ser empregadas as análises modal e transiente. A análise modal consiste em determinar as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura. Com relação à análise transiente, a resposta de uma estrutura submetida à ação de um carregamento variável qualquer ao longo do tempo é avaliada (CLOUGH; PENZIEN, 1995; RAJASEKARAN, 2009).

A investigação dinâmica de sistemas estruturais é um problema importante na engenharia estrutural (MOUSSEMI; NEZAMOLMOLKI e AFTABI SANI, 2017). A instabilidade dinâmica pode ocorrer quando uma estrutura é submetida a cargas periódicas ou quase periódicas devido à oscilação paramétrica. A proposição de novas técnicas, métodos e abordagens para resolver problemas de vibração livre e/ou flambagem de pórticos sempre foi uma intensa atividade da comunidade científica. Particularmente, pórticos planos são componentes conceituais úteis para abordar estudos preliminares acerca da dinâmica e da flambagem de estruturas mais complexas (MARTÍN et al., 2022; XU; WANG; LI, 2022).

As formulações não lineares no domínio do tempo vêm ganhando cada vez mais espaço na literatura especializada no que diz respeito à análise dinâmica de estruturas. Esse tipo de análise permite prever o comportamento de estruturas em situações além do limite elástico, incluindo a perda de resistência e de rigidez relacionada ao comportamento inelástico dos materiais e a ocorrência de grandes deslocamentos e rotações (CODA e PACCOLA, 2014).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente utilizado como um método de solução para análise de diversos problemas de engenharia descritos por equações diferenciais parciais (EDPs) (REDDY, 2014). Após as EDPs governantes originais serem espacialmente discretizadas pelo emprego de um método numérico apropriado, como o MEF, as equações diferenciais ordinárias (EDOs) no tempo são obtidas. Essas EDOs no tempo são chamadas de equações semidiscretas, e métodos passo a passo de integração direta no tempo são usados para obter soluções numéricas para elas (KIM, 2020). O algoritmo de integração direta no tempo é usado para análises transientes de problemas dinâmicos não lineares, o qual pode ser explícito ou implícito. O esquema explícito é apropriado para problemas de ondas, enquanto que o implícito para problemas de inércia (LIU; LI; ZHAO, 2013). No campo da mecânica dos sólidos e das estruturas, os esquemas implícitos, como os métodos clássicos de Newmark, Wilson- $\theta$  e  $\alpha$ -HHT, são largamente utilizados (ARRUDA e CASTRO, 2012).

Recentes avanços da engenharia estrutural incorporando novos materiais, juntamente com o aperfeiçoamento da modelagem matemática, ferramentas de computação numérica mais precisas e modelos que permitem simulação mais realista levaram a soluções mais eficientes e projeto de elementos estruturais com maior esbelteza. Isso é particularmente verdadeiro em estruturas em que os efeitos do peso próprio devem ser minimizados, como em construções de engenharia civil com grandes vãos. No entanto, o

aumento da esbelteza desses elementos tornou-os mais susceptíveis à vibração e aos problemas de flambagem. Além disso, isso aumenta a influência de não linearidades, sobretudo a não linearidade geométrica, em seus comportamentos estático e dinâmico (GALVÃO et al., 2010).

Nas últimas décadas, as análises dinâmicas geometricamente não lineares de vigas e pórticos com grandes deslocamentos, utilizando a formulação corrotacional do MEF, chamaram a atenção de muitos pesquisadores (LE; BATTINI; HJIAJ, 2011; CHHANG et al., 2017; ELKARANSHAWY; ELERIAN; HUSSIEN, 2018; DENG; ZHANG, 2020; DENG et al., 2022). A formulação corrotacional é uma abordagem atraente para derivar elementos finitos de viga-pilar não lineares (URTHALER, Y.; REDDY, 2005; LE; BATTINI; HJIAJ, 2011). A ideia principal dessa formulação pode ser resumida da seguinte forma: o movimento do elemento é decomposto em corpo rígido e deformacional puro. Um sistema de coordenadas locais, que translada e rotaciona com o movimento geral do corpo rígido do elemento, é definido. A parte deformacional é medida nesse sistema local (VIANA et al., 2020).

Parte dos pesquisadores negligenciou o efeito de cisalhamento na análise geometricamente não linear dos elementos de viga-pilar e, então, eles avaliaram as matrizes de rigidez e de massa usando o modelo de viga de Euler-Bernoulli (ELKARANSHAWY; ELERIAN; HUSSIEN, 2018). Para modelar o efeito de cisalhamento, o modelo de viga de Timoshenko foi usado nos trabalhos de BATTINI (2002), KIEN (2012) e BEHESHTI (2016) para a avaliação da matriz de rigidez. Enquanto a teoria de viga de Euler-Bernoulli é completamente suficiente para aplicações em vigas esbeltas, a teoria de viga de Timoshenko leva em consideração a deformação por cisalhamento, tornando-a adequada para descrever o comportamento de vigas curtas, vigas mistas ou vigas sujeitas à excitação de alta frequência (CHHANG; BATTINI; HJIAJ, 2017).

Em formulações dinâmicas corrotacionais, matrizes de massa constantes são frequentemente utilizadas para expressar os termos dinâmicos. Há duas matrizes usualmente encontradas na literatura, que são a matriz de massa condensada (XUE; MEEK, 2001) e a matriz de massa de Timoshenko (IURA; ATLURI, 1995). As matrizes de massa condensada são matrizes diagonais que ocupam menos espaço de armazenamento e requerem menos esforço computacional. Se a matriz é definida positiva e diagonal, então a utilização da mesma aumenta o efeito de estabilidade sobre os passos de tempo na obtenção da solução (XUE; MEEK, 2001).

## 2. OBJETIVO

Este artigo tem o objetivo de apresentar um modelo numérico-computacional baseado na formulação corrotacional do MEF no que tange à análise dinâmica transiente aplicada em vigas e pórticos com comportamento não linear geométrico. As respostas dinâmicas dos sistemas estruturais, sujeitos a condições iniciais de deslocamentos, velocidades e acelerações, bem como a ação de carregamentos dependentes do tempo, são obtidas ao longo de um intervalo de tempo definido. Em adição, as três primeiras frequências naturais são determinadas desses sistemas, as quais se caracterizam como a intensidade com que cada estrutura vibra quando não está sujeita à ação de forças externas.

Os materiais são considerados isotrópicos e elásticos, e a seção transversal do elemento de viga-pilar é uniforme. As matrizes de rigidez e os vetores de força interna dos sistemas estruturais são determinados usando as teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Duas aproximações são utilizadas para a matriz de massa – condensada e de Timoshenko, as quais permanecem constantes durante a etapa de correção da solução inicial.

Ao discretizar a estrutura por meio do MEF, a resposta transiente é alcançada com a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A solução aproximada desse sistema é obtida por intermédio do método incremental e iterativo de Newton-Raphson padrão e do método implícito de integração de Newmark. A efetividade e a acurácia do algoritmo são demonstradas a partir de três

problemas dinâmicos encontrados na literatura. Para esse propósito, um código computacional é desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 2023.1.0 (SCILAB, 2023).

### 3. METODOLOGIA

As estruturas são discretizadas por meio do elemento finito corrotacional de viga-pilar 2D, considerando as teorias de viga de Euler-Bernoulli (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009) e de Timoshenko (BATTINI, 2002). Com relação àquela teoria, o efeito de cisalhamento é desprezado, enquanto que nesta teoria esse efeito é considerado. Comumente, de acordo com sua espessura, vigas e pórticos podem ser classificados em duas categorias: fina e espessa. Em vigas e pórticos finos, a relação comprimento/espessura é grande. Conseqüentemente, o efeito de cisalhamento é pequeno nesse caso. Inversamente, a análise do efeito de cisalhamento é muito significativa em vigas e pórticos espessos, que possuem pequena relação comprimento/espessura (ELKARANSRAWY; ELERIAN e HUSSIEN, 2018).

A resposta do sistema dinâmico é obtida mediante a integração no tempo de um sistema de equações diferenciais não lineares de segunda ordem. O método implícito de integração de Newmark (NEWMARK, 1959) aplicado ao problema não linear requer a solução desse sistema em cada passo de tempo. Nesse caso, a solução aproximada do problema é alcançada por meio de sucessivas soluções de sistemas de equações algébricas, em cada instante de tempo, usando o algoritmo incremental e iterativo de Newton-Raphson padrão.

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO CORROTACIONAL DE VIGA-PILAR 2D

O elemento finito de viga-pilar tem dois nós e três graus de liberdade por nó. Considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma. Seja o elemento em suas configurações inicial e atual, conforme o desenho esquemático na Figura 1. Na configuração inicial, as coordenadas dos nós "1" e "2" do elemento no sistema global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente.

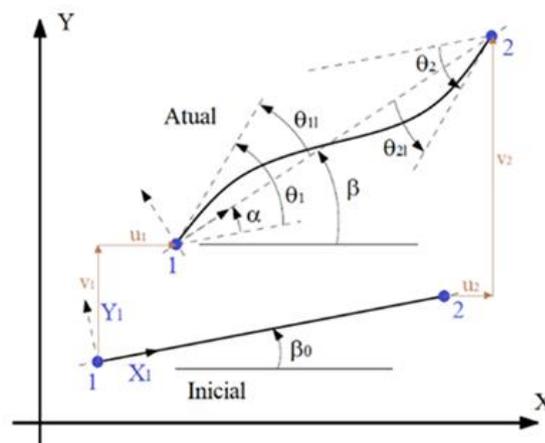


FIGURA 1: Configurações inicial e atual do elemento de viga-pilar. Fonte: FONTE: Adaptada de Yaw (2009).

O comprimento inicial (indeformado)  $L_0$  da viga é dado pela Equação 1 (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad \text{Eq. [1]}$$

Para o elemento de viga na sua configuração atual, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó “1” e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó “2”, em que  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $X$  e  $v_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $Y$ , sendo  $i = 1, 2$ . O comprimento deformado  $L$  do elemento é dado por meio da Equação 2 (YAW, 2009):

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad \text{Eq. [2]}$$

O vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{p}$  do elemento finito  $m$  é dado pela Equação 3:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T. \quad \text{Eq. [3]}$$

O deslocamento axial local ( $u_1$ ) do elemento é calculado pela Equação 4:

$$u_1 = L - L_0. \quad \text{Eq. [4]}$$

Assume-se que a deformação específica  $\varepsilon$  é constante e é determinada por  $\varepsilon = u_1/L_0$ . A força axial  $N$  da barra é, então, avaliada conforme a Equação 5:

$$N = \frac{EA\bar{u}}{L_0}, \quad \text{Eq. [5]}$$

Na qual  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga-pilar ( $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) são relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ) da seguinte forma (Equação 6) (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. [6]}$$

Em que  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ) são computadas por, respectivamente pelas Equações 7 e 8:

$$\theta_{11} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1}\right), \quad \text{Eq. [7]}$$

$$\theta_{21} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2}\right), \quad \text{Eq. [8]}$$

Sendo  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas a partir do sistema de equações globais. As expressões para o ângulo inicial  $\beta_0$  e o para o ângulo corrente  $\beta$  da barra são, respectivamente pelas Equações 9 e 10:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \quad \text{Eq. [9]}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right). \quad \text{Eq. [10]}$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  e da matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais  $\mathbf{K}_G$ , dada pela Equação 11 (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G, \quad \text{Eq. [11]}$$

Na qual

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}, \quad \text{Eq. [12]}$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T). \quad \text{Eq. [13]}$$

A matriz  $\mathbf{D}$  na Equação (12) é a matriz constitutiva dada por meio da Equação 14:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. [14]}$$

Em que  $r = \sqrt{I/A}$  é o raio de giração, os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$  são, Equações 15 e 16 respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T, \quad \text{Eq. [15]}$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T, \quad \text{Eq. [16]}$$

e a matriz  $\mathbf{B}$  é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Eq. [17]}$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo  $\beta$ , denotados por  $s$  e  $c$  nas Equações (15), (16) e (17), são dadas por meio das Equações 18 e 19 respectivamente:

$$s = \text{sen}(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}, \quad \text{Eq. [18]}$$

$$c = \text{cos}(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}. \quad \text{Eq. [19]}$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é determinado pela Equação 20:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T. \quad \text{Eq. [20]}$$

O elemento de viga-pilar baseado na teoria Timoshenko clássico com dois nós é definido com interpolações lineares para os deslocamentos  $u$  e  $v$  e para a rotação  $\theta$  no sistema de coordenadas locais, os quais são dados por meio das Equações 21 a 23 (BATTINI, 2002):

$$u = \frac{x}{L_0} u_1, \quad \text{Eq. [21]}$$

$$v = 0, \quad \text{Eq. [22]}$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \theta_{11} + \frac{x}{L_0} \theta_{21}. \quad \text{Eq. [23]}$$

A curvatura  $\kappa$ , a deformação de cisalhamento ou distorção  $\phi$  e a deformação específica  $\varepsilon$  são definidas por, respectivamente (Equações 24 a 26):

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\theta_{11}}{L_0} + \frac{\theta_{21}}{L_0} = \frac{\theta_{21} - \theta_{11}}{L_0}, \quad \text{Eq. [24]}$$

$$\phi = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L_0}\right)\theta_{11} - \frac{x}{L_0}\theta_{21}, \quad \text{Eq. [25]}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa y = \frac{u_1}{L_0} - \left(\frac{\theta_{21} - \theta_{11}}{L_0}\right)y. \quad \text{Eq. [26]}$$

Para o cálculo da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  na Equação (12), utiliza-se a seguinte matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  (Equação 27):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4L_0} \begin{bmatrix} 4EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EI + \mu GAL_0^2 & -4EI + \mu GAL_0^2 \\ 0 & -4EI + \mu GAL_0^2 & 4EI + \mu GAL_0^2 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. [27]}$$

Em que  $G$  é o módulo transversal de cisalhamento e  $\mu$  é o coeficiente de correção de cisalhamento. Para o cálculo da matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$  são utilizados os momentos locais nas extremidades do elemento ( $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) determinados pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L_0}(\theta_{11} - \theta_{21}) + \frac{1}{4}\mu GAL_0(\theta_{11} + \theta_{21}) \\ \frac{EI}{L_0}(\theta_{21} - \theta_{11}) + \frac{1}{4}\mu GAL_0(\theta_{11} + \theta_{21}) \end{bmatrix}. \quad \text{Eq. [28]}$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é obtido de acordo com a Equação (20), sendo os valores dos momentos  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$  obtidos pela Equação (28) e a força normal  $N$  pela Equação (5).

### 3.2 PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que governa a resposta dinâmica não linear de um sistema estrutural em termos dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  é dada pela Equação 29 (ARRUDA; MOLDOVAN, 2015):

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{F}_{ext}(t) = \mathbf{0}, \quad \text{Eq. [29]}$$

Sendo  $t$  o tempo,  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento,  $\mathbf{M}$  a matriz de massa,  $\dot{\mathbf{u}}$  o vetor de velocidade,  $\ddot{\mathbf{u}}$  o vetor de aceleração,  $\mathbf{F}_{int}$  o vetor de forças internas nodais do sistema estrutural e  $\mathbf{F}_{ext}$  o vetor de cargas externas dinâmicas. O vetor  $\mathbf{F}_{int}$  é obtido a partir do vetor de forças internas de cada elemento finito ( $\mathbf{F}_{el}$ ), o qual é determinado conforme a Equação (20), por meio do método de rigidez direta. Nesse procedimento, o vetor  $\mathbf{F}_{int}$  é calculado pela adição direta de cada vetor elementar  $\mathbf{F}_{el}$ , ou seja,  $\mathbf{F}_{int} = \sum_i \mathbf{F}_{el_i}$ , em que a soma inclui todos os elementos (BATHE, 2006).

A solução aproximada do sistema dado em Equação (29), cujas incógnitas são  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , é obtida por um esquema de integração numérica. As condições iniciais do problema são:

$$\mathbf{u}(t = 0) = {}^0\mathbf{u} \text{ e } \dot{\mathbf{u}}(t = 0) = {}^0\dot{\mathbf{u}}. \quad \text{Eq. [30]}$$

O vetor aceleração no tempo  $t = 0$  é obtido diretamente pela expressão:

$${}^0\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1} [ {}^0\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}({}^0\mathbf{u}) - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{u}} ]. \quad \text{Eq. [31]}$$

Utiliza-se o método implícito de integração de Newmark (1959) devido a sua simplicidade (NGUYEN; KIM, 2013), o qual consiste em expressar os vetores de deslocamentos e de velocidade em aproximações por diferenças finitas no domínio do tempo. Para o instante de tempo atual ( $t + \Delta t$ ), as expressões de Newmark para o deslocamento  $\mathbf{u}$  e a velocidade  $\dot{\mathbf{u}}$  são dadas por, respectivamente (FERNANDES; VASCONCELLOS e GRECO, 2018):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \quad \text{Eq. [32]}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}, \quad \text{Eq. [33]}$$

Em que  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes referentes ao método de Newmark e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo. Utilizando as Equações (32) e (33) na equação dinâmica de equilíbrio dada pela Equação (29), chega-se à equação na iteração ( $k + 1$ ) e passo de tempo ( $t + \Delta t$ ) (CODA e PACCOLA, 2014):

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k+1)} = & \mathbf{F}_{\text{int}} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} \right) + \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s + {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s \\ & + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \gamma \Delta t {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad \text{Eq. [34]}$$

Na qual os vetores  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{r}_s$  representam as contribuições dinâmicas no tempo corrente e são dados por meio das Equações 35 e 36 respectivamente (GRECO e CODA, 2006):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_s = \frac{{}^t\mathbf{u}}{\beta \Delta t^2} + \frac{{}^t\dot{\mathbf{u}}}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}}, \quad \text{Eq. [35]}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}}. \quad \text{Eq. [36]}$$

Nota-se nas equações anteriores que o superíndice esquerdo ( $t$ ) indica o passo de tempo anterior e o superíndice direito ( $k$ ), a iteração anterior. As forças residuais em cada intervalo de tempo podem ser eliminadas usando o procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson padrão (NGUYEN; KIM, 2013). As equações iterativas que estabelecem o equilíbrio dinâmico do sistema estrutural em função da variável deslocamento  $\mathbf{u}$  são (Equações 37 e 38):

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k+1)} = -{}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k+1)}, \quad \text{Eq. [37]}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k+1)}, \quad \text{Eq. [38]}$$

Sendo  ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)}$  a matriz de rigidez efetiva dada por meio da Equação 39:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} \right), \quad \text{Eq. [39]}$$

Em que  $\mathbf{K} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} \right)$  é a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural.

A Figura 2 apresenta o pseudoalgoritmo da técnica de integração de Newmark com o método de Newton-Raphson padrão. Os dados de entrada no algoritmo são: o vetor de deslocamentos nodais  ${}^0\mathbf{u}$ ; o vetor de velocidade  ${}^0\dot{\mathbf{u}}$ ; o incremento de tempo  $\Delta t$ ; o tempo máximo  $t_{\text{máx}}$ ; o número máximo de iterações em cada passo de tempo  $k_{\text{máx}}$ ; e a tolerância  $\text{tol}$  para o critério de convergência. As saídas do mesmo são: os vetores

$\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ; o número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução ( $k_{\text{total}}$ ); número médio de iterações por passo de tempo ( $k_{\text{médio}}$ ); e o tempo de processamento em segundos.

A matriz de massa do elemento finito  $\mathbf{M}_{\text{el}}$ , no sistema local de coordenadas cartesianas, pode ser obtida pela seguinte expressão (ELKARANSHAWY; ELERIAN e HUSSIAN, 2018):

$$\mathbf{M}_{\text{el}} = \int_V \mathbf{H}^T \rho \mathbf{H} dV, \quad \text{Eq. [40]}$$

Sendo  $\mathbf{H}$  a matriz que contém as funções de interpolação e  $\rho$  a densidade do material. À matriz  $\mathbf{M}_{\text{el}}$  calculada segundo a Equação (40), dá-se o nome de matriz de massa consistente, visto que as funções de aproximação utilizadas em seu cálculo são as mesmas utilizadas no cálculo da matriz de rigidez. Essa matriz permite considerar nas equações dinâmicas da estrutura o efeito das massas que não estão originalmente concentradas nos nós (COOK; MALKUS; PLESHA, 2001). Uma matriz de massa bastante difundida em análises não lineares é a de Timoshenko, denotada por  $\mathbf{M}_{\text{Tim}}$ , e é expressada por meio da Equação 41 (CHHANG; BATTINI e HJIAJ, 2017; LE; BATTINI e HJIAJ, 2011):

$$\mathbf{M}_{\text{Tim}} = \rho L_0 \begin{bmatrix} A/3 & 0 & 0 & A/6 & 0 & 0 \\ 0 & A/3 & 0 & 0 & A/6 & 0 \\ 0 & I L_0/3 & 0 & 0 & 0 & I L_0/3 \\ A/6 & 0 & 0 & A/3 & 0 & 0 \\ 0 & A/6 & 0 & 0 & A/3 & 0 \\ 0 & 0 & I L_0/3 & 0 & 0 & I L_0/3 \end{bmatrix}. \quad \text{Eq. [41]}$$

Outro modelo bastante simples e recorrente refere-se ao elemento em que toda massa é transferida diretamente para os seus nós, resultando em uma matriz diagonal, conhecida como matriz de massa condensada ( $\mathbf{M}_{\text{con}}$ ). Essa matriz é descrita pela seguinte equação (CHOPRA, 1995; LE; BATTINI e HJIAJ, 2011):

$$\mathbf{M}_{\text{con}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{m} \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. [42]}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A L_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_0^2/12 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. [43]}$$

Em que  $\mathbf{0}_3$  é a matriz nula de ordem 3.

*Entrada:*  $\Delta t$ ,  $t_{\text{máx}}$ ,  $k_{\text{máx}}$

*Saída:*  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $t$ ,  $k_{\text{total}}$

1. tempo  $\leftarrow t_{\text{máx}}/\Delta t$
2.  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{u}} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $k_{\text{total}} \leftarrow 0$
3. tic (inicia o cronômetro)
4.  ${}^0\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}({}^0\mathbf{u}) - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{u}}]$
5.  $a_1 \leftarrow \beta \Delta t^2$
6.  $a_2 \leftarrow \beta \Delta t$
7.  $a_3 \leftarrow \gamma \Delta t$
8.  $a_4 \leftarrow \frac{\gamma}{a_2}$
9.  $a_5 \leftarrow \frac{\gamma}{a_1}$
10.  $\mathbf{G}_1 \leftarrow \frac{\mathbf{M}}{a_1}$
11.  $\mathbf{G}_2 \leftarrow a_4 \mathbf{C}$
12. Para  $np \leftarrow 1, \dots$ , tempo faça

13.  $\mathbf{q}_s \leftarrow \frac{t_u}{a_1} + \frac{t_u}{a_2} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) t_u \ddot{\mathbf{u}}$
14.  $\mathbf{r}_s \leftarrow t_u \dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) t_u \ddot{\mathbf{u}}$
15.  $\mathbf{G}_3 \leftarrow \mathbf{M} \mathbf{q}_s$
16.  $\mathbf{G}_4 \leftarrow \mathbf{C} \mathbf{r}_s$
17.  $\mathbf{G}_5 \leftarrow a_3 \mathbf{C} \mathbf{q}_s$
18.  $\mathbf{G}_6 \leftarrow \mathbf{r}_s - a_3 \mathbf{q}_s$
19. **Enquanto**  $k < k_{\text{máx}}$  **faça**
20.  $\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$
21.  $\mathbf{g}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{G}_1 \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{G}_2 \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4 - \mathbf{G}_5$
22.  $\delta \mathbf{u}^{(k+1)} \leftarrow -[\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k+1)}$
23.  $\mathbf{u}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}^{(k+1)}$
24.  $\dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} \leftarrow a_4 \mathbf{u}^{(k+1)} + \mathbf{G}_6$
24.  $\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} \leftarrow a_5 \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{q}_s$
25. **Se**  $\|\delta \mathbf{u}^{(k+1)}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{u}^{(k+1)}\|$  **então**
26. Sai do Enquanto
28. **Fim-Se**
29. **Fim-Enquanto**
30.  $k_{\text{total}} \leftarrow k_{\text{total}} + k$
31. **Fim-Para**
32.  $k_{\text{médio}} \leftarrow k_{\text{total}}/np$
33. toc (lê o cronômetro)

**FIGURA 2:** Pseudoalgoritmo da técnica de integração de Newmark com o método de Newton-Raphson padrão.

**FONTE:** Autoria Própria.

A definição do tipo de matriz de massa a ser considerada depende do tipo de análise a ser efetuada e da discretização utilizada. Geralmente, aconselha-se a adoção de matrizes de massa consistentes quando são utilizados elementos finitos de ordem elevada na discretização (COOK; MALKUS e PLESHA, 2001).

### 3.3 DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA

As frequências naturais são propriedades inerentes ao sistema estrutural e dependem da sua distribuição de massa e rigidez. A análise das frequências é essencial no que tange ao estudo da estabilidade de sistemas estruturais com trajetórias de equilíbrio fortemente não lineares. Desprezando o efeito do amortecimento ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ), a equação de movimento do sistema estrutural em vibração livre ( $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ ) é definida, a partir da Equação (29), por (CHUNG e YOO, 2002):

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad \text{Eq. [44]}$$

Propondo a solução para a Equação (44) da forma  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$ , chega-se no problema clássico de autovalor e autovetor dado pela Equação 45:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} e^{i\omega t} + \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} = \mathbf{0}, \quad \text{Eq. [45]}$$

Em que  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\boldsymbol{\phi}$  é o autovetor correspondente ao modo de vibração e  $\omega$  é o autovalor que representa uma frequência natural de vibração do sistema natural dada em rad/s. Supondo que a matriz  $\mathbf{M}$  seja inversível (isto é,  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$ ), tomando  $i^2 = -1$  e multiplicando ambos os lados da Equação (45) por  $\mathbf{M}^{-1}$ , a mesma é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\omega^2\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{I}\omega^2\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad \text{Eq. [46]}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi}, \quad \text{Eq. [47]}$$

Na qual  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  e  $\lambda = \omega^2$ . Na literatura, podem ser encontrados algoritmos computacionais capazes de resolver o problema dado em Equação (47) e fornecer, de uma só vez, todas as frequências naturais e modos de vibração. Neste trabalho, utiliza-se a função do Scilab  $\mathbf{evals} = \mathit{spec}(\mathbf{A})$ , a qual retorna no vetor  $\mathbf{evals}$  os autovalores. O número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural.

#### 4. PROBLEMAS NUMÉRICOS

Um programa de computador escrito com o *software* livre Scilab é desenvolvido. Três problemas numéricos dinâmicos encontrados na literatura são apresentados para avaliar a precisão e a eficiência da formulação corrotacional fundamentada nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A abordagem corrotacional é frequentemente utilizada para estudar problemas de estruturas com grandes deslocamentos e rotações ou para realizar análises de estabilidade. Com relação à matriz de massa nas análises não lineares, duas matrizes constantes baseadas em teorias simplificadas são consideradas, que são a matriz de massa condensada dada pelas Equações (40) e (41) e a matriz de massa de Timoshenko descrita pela Equação (42). A resposta não linear dos sistemas estruturais é obtida ao longo de um intervalo de tempo definido. As constantes  $\gamma$  e  $\beta$  referentes ao método de Newmark são adotadas iguais a 0,5 e 0,25, respectivamente.

##### 4.1 VIGA EM BALANÇO SUJEITA A UMA FORÇA SENOIDAL

Este primeiro exemplo, descrito na Figura 3, é uma viga em balanço de comprimento  $L_0 = 10$  m com seção transversal retangular de dimensões  $(0,5 \times 0,25)$  m<sup>2</sup>, engastada em uma extremidade e submetida a uma força senoidal dada pela função  $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$  na extremidade livre. A amplitude da força é  $P_0 = 10$  MN e sua frequência é  $\omega = 50$  rad/s. O módulo de elasticidade longitudinal é  $E = 210$  GPa e a massa por unidade de volume é  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. As análises dinâmicas são efetuadas neste exemplo sem considerar o efeito do amortecimento. Assim, na Equação (29) a matriz  $\mathbf{C}$  é igual à matriz nula  $\mathbf{0}$ .

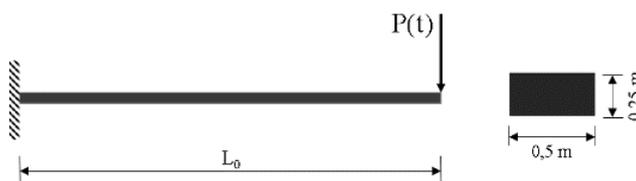
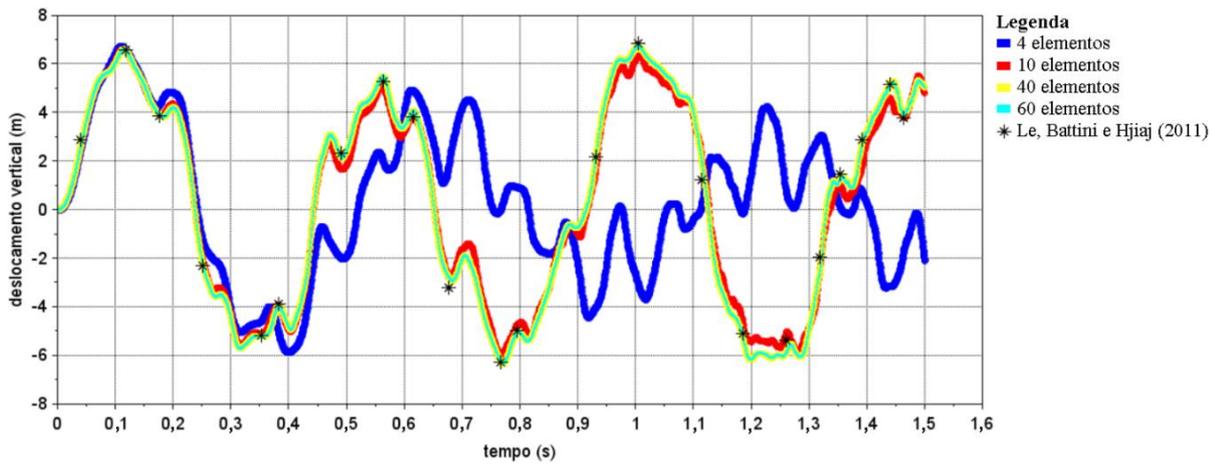


FIGURA 3: Viga em balanço – modelo estrutural.

FONTE: Autoria Própria.

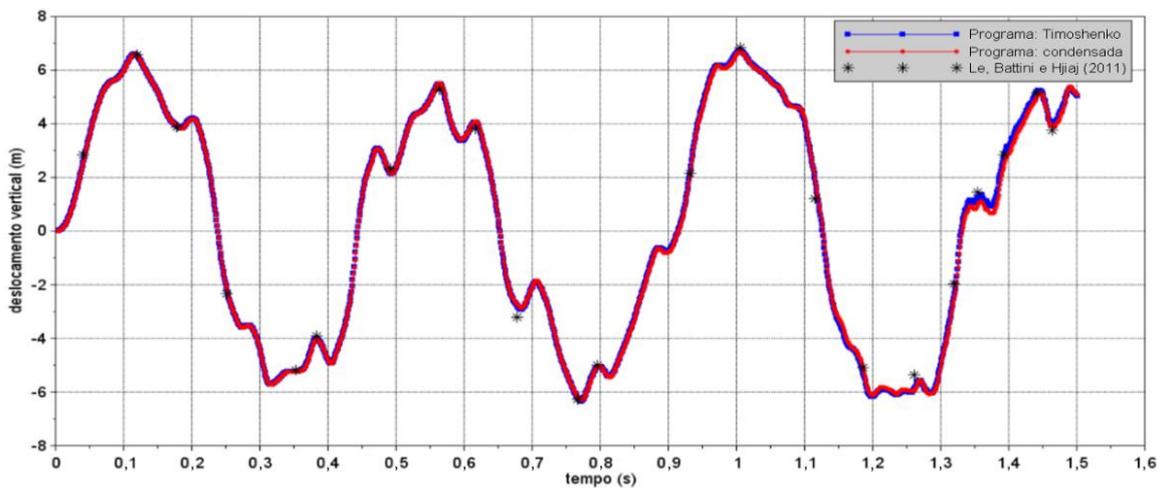
Na Figura 4 são apresentadas as curvas tempo *versus* deslocamento vertical na extremidade livre da viga obtidas com a matriz de massa de Timoshenko, resultantes da análise de refinamento da malha de elementos finitos (4, 10, 40 e 60 elementos) tomando como referência os pontos obtidos por Le, Battini e Hjjaj (2011). Pode-se observar que a malha com 60 elementos fornece resultados bem próximos da solução de referência. Nas análises são adotados os seguintes parâmetros: incremento de tempo  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$  s, número máximo de iterações na correção da solução  $k_{\text{máx}} = 200$ , tolerância para o critério de convergência  $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-10}$  e tempo máximo  $t = 1,5$  s. Quanto à teoria de viga, considera-se a de Euler-Bernoulli.

Na Figura 5 são mostradas as curvas com as simulações considerando as matrizes de massa de Timoshenko e condensada e a malha com 60 elementos. Nota-se que há algumas discrepâncias nas curvas, notadamente no intervalo de tempo de 1,3 s a 1,4 s, havendo melhor precisão com a matriz de massa de Timoshenko. Na Figura 6 são apresentadas as configurações deformadas da viga para diferentes valores de tempo  $t$  obtidas nas simulações com a matriz de massa de Timoshenko.



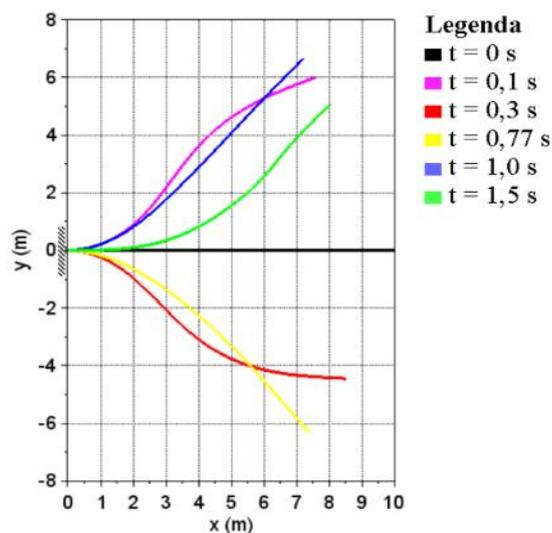
**FIGURA 4:** Viga em balanço – curvas tempo *versus* deslocamento vertical obtidas com a matriz de massa de Timoshenko, considerando malhas com 4, 10, 40 e 60 elementos finitos.

**FONTE:** Autoria Própria.



**FIGURA 5:** Viga em balanço – curvas tempo *versus* deslocamento vertical comparando as matrizes de massa de Timoshenko e condensada, considerando a malha com 60 elementos finitos.

**FONTE:** Autoria Própria.



**FIGURA 6:** Configurações deformadas da viga em balanço para diferentes valores de tempo  $t$ .

**FONTE:** Autoria Própria.

Na Tabela 1 são apresentadas as três primeiras frequências naturais da viga em balanço (em rad/s e em Hz) utilizando a matriz condensada, conforme procedimento descrito na Seção 3.3. As frequências naturais de vibração de uma estrutura indicam a capacidade de oscilação livre após cessado o estímulo ou o carregamento que gerou sua perturbação. Para cada modo de vibração, a estrutura apresentará uma frequência natural de vibração, sendo que a mais importante nos estudos dinâmicos é a primeira, menor entre todas, denominada de frequência fundamental. Os fatores que influenciam na frequência natural são a rigidez e a massa da estrutura, que por sua vez dependem da geometria, do material e das condições de vinculação (NETTO e ARAÚJO, 2018).

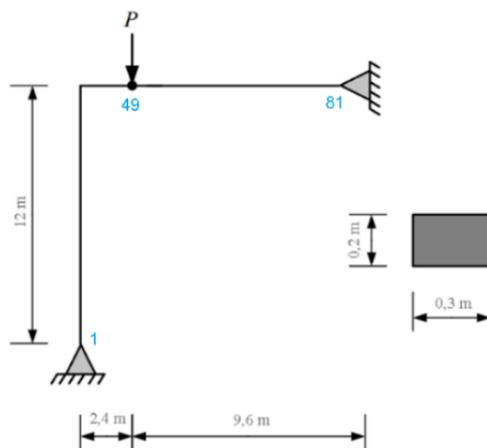
**TABELA 1: Viga em balanço – frequências naturais**

frequência	$\omega$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)
1	13,1218	2,0884
2	82,1811	13,0795
3	229,9252	36,5937

FONTE: Autoria Própria

#### 4.2 PÓRTICO DE LEE

Seja o pórtico de Lee, ilustrado na Figura 7, e submetido a uma carga constante aplicada repentinamente com intensidade  $P = 4,1$  MN. As barras da estrutura têm módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa e massa por unidade volume  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. As análises dinâmicas são realizadas com os seguintes parâmetros: número máximo de iterações na correção da solução  $k_{\text{máx}} = 200$ ; tolerância  $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-4}$ ; e tempo máximo  $t = 3$  s. O efeito do amortecimento não é considerado nas análises com o pórtico ( $C = 0$ ).



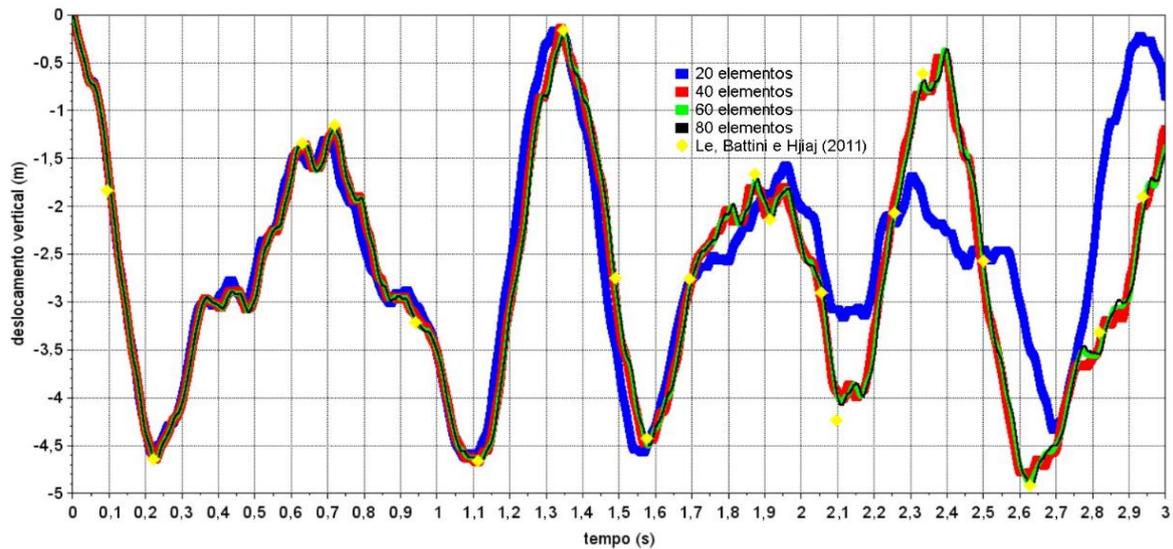
**FIGURA 7:** Pórtico de Lee – modelo estrutural.

FONTE: Adaptada de Le, Battini e Hjiáj (2011).

Na Figura 8 são apresentadas as curvas tempo *versus* deslocamento vertical no ponto de aplicação da força  $P$  obtidas com a matriz de massa de Timoshenko. No estudo de refinamento da malha de elementos finitos, são adotadas malhas com 20, 40, 60 e 80 elementos, tomando como referência os pontos de equilíbrio obtidos por Le, Battini e Hjiáj (2011). Vê-se que a estrutura discretizada com 80 elementos corrotacionais fornece resultados razoavelmente próximos da solução de referência. Nas simulações é considerada a formulação corrotacional baseada na teoria de viga de Euler-Bernoulli e o incremento de tempo  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4}$  s.

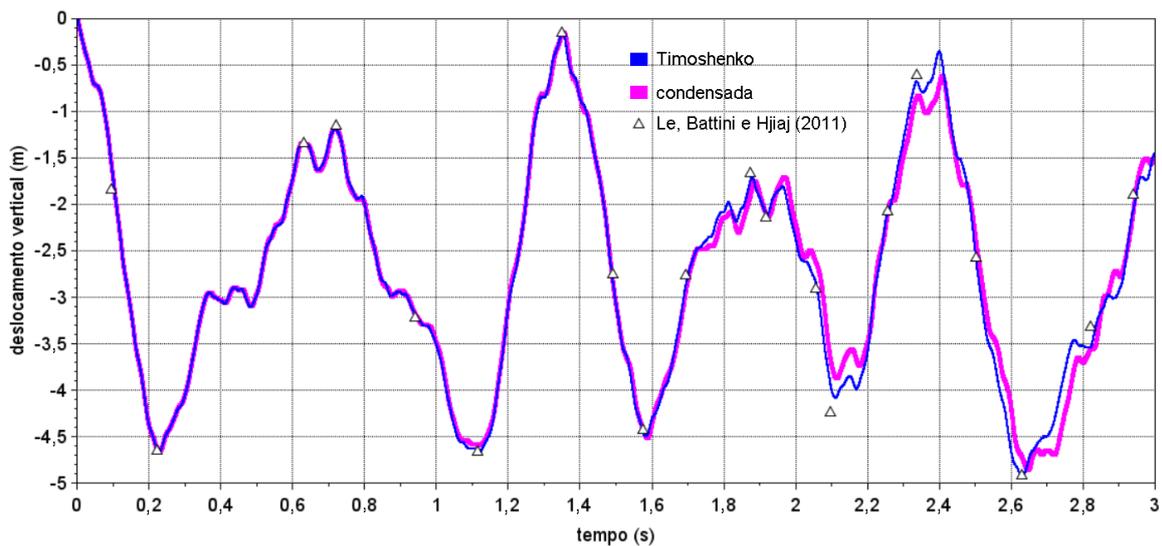
Ao comparar as curvas obtidas com as matrizes de massa condensada e de Timoshenko na Figura 9, observa-se que os resultados numéricos com esta matriz ficaram mais próximos dos pontos de equilíbrio obtidos por Le, Battini e Hjiáj (2011). No entanto, considerando aquela matriz, houve discrepâncias com

destaque à região no entorno do tempo  $t \cong 1,1$  s e no intervalo de tempo de  $t \cong 1,73$  s até  $t = 3$  s. As simulações com ambas as matrizes são obtidas com  $n_p = 1,2 \times 10^3$  passos de tempo,  $k_{total} = 2,4 \times 10^4$  iterações e  $k_{médio} = 2$  iterações por passo de tempo. As três primeiras frequências naturais do pórtico considerando a matriz condensada são mostradas na Tabela 2.



**FIGURA 8:** Pórtico de Lee – curvas tempo *versus* deslocamento vertical obtidas com a matriz de massa de Timoshenko, considerando malhas com 20, 40, 60 e 80 elementos finitos.

**FONTE:** Autoria Própria.



**FIGURA 9:** Pórtico de Lee – curvas tempo *versus* deslocamento vertical obtidas com as matrizes de massa de Timoshenko e condensada, considerando a malha com 80 elementos finitos.

**FONTE:** Autoria Própria.

**TABELA 2:** Pórtico de Lee – frequências naturais

frequência	$\omega$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)
1	20,4569	3,2558
2	31,9407	5,0835
3	81,7082	13,0042

**FONTE:** Autoria Própria

### 4.3 VIGA BIAPOIADA

Considere a viga simplesmente apoiada submetida a uma força concentrada  $P(t)$  no meio do vão, conforme o modelo estrutural na Figura 10. O comprimento da mesma é  $L_0 = 1$  m e a seção transversal retangular tem dimensões  $(0,20 \times 0,15)$  m<sup>2</sup>. Os parâmetros materiais são: módulo de elasticidade  $E = 1,0$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , densidade  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> e o coeficiente de correção de cisalhamento  $\mu = 5/6$ . Para o método de solução, o número máximo de iterações na correção da solução  $k_{\text{máx}} = 200$ , a tolerância  $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-5}$  e o tempo máximo  $t = 0,4$  s são adotados.

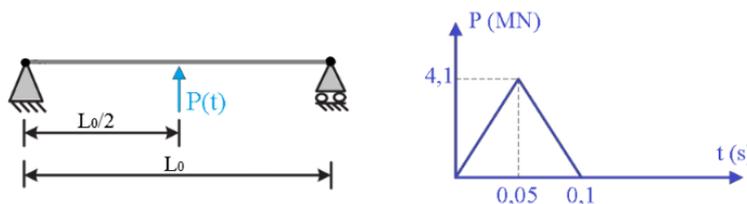


FIGURA 10: Viga biapoiada – modelo estrutural e carregamento dinâmico.

FONTE: Autoria Própria.

Um estudo de refino de malha é feito na Figura 11, em que são apresentadas as curvas tempo - deslocamento horizontal na extremidade da direita (com o apoio móvel) sem considerar o amortecimento ( $C = 0$ ), obtidas com a formulação corrotacional baseada na teoria de viga de Timoshenko e com a matriz de massa de Timoshenko. A viga é discretizada com 4, 10 e 20 elementos corrotacionais. A curva obtida com 20 elementos fornece resultados bastante próximos da solução de referência - Chhang, Battini e Hjjaj (2017). As simulações são efetuadas com o incremento de tempo  $\Delta t = 0,4 \times 10^{-3}$  s.

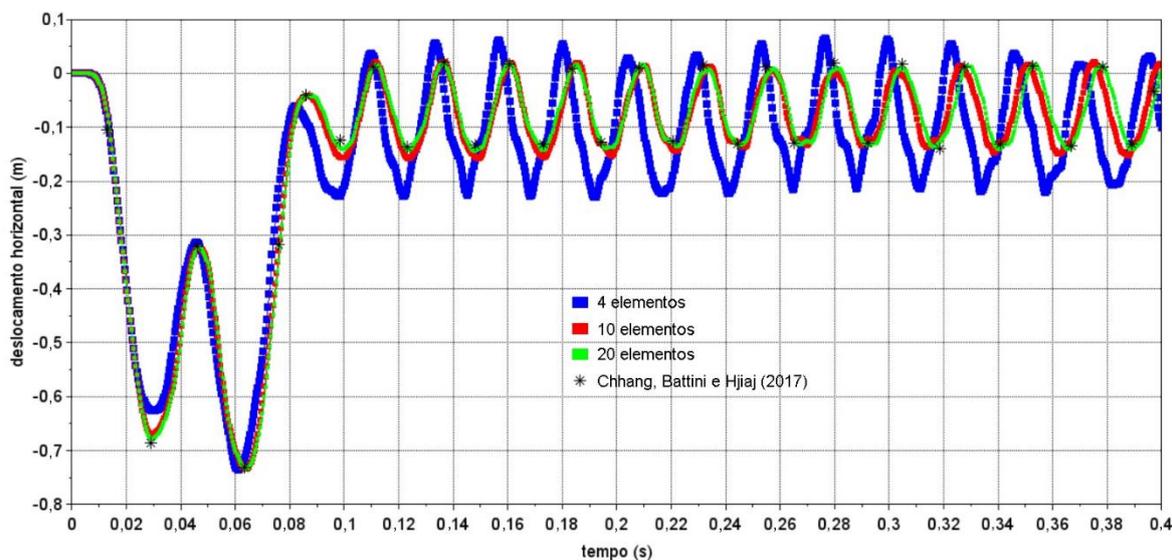
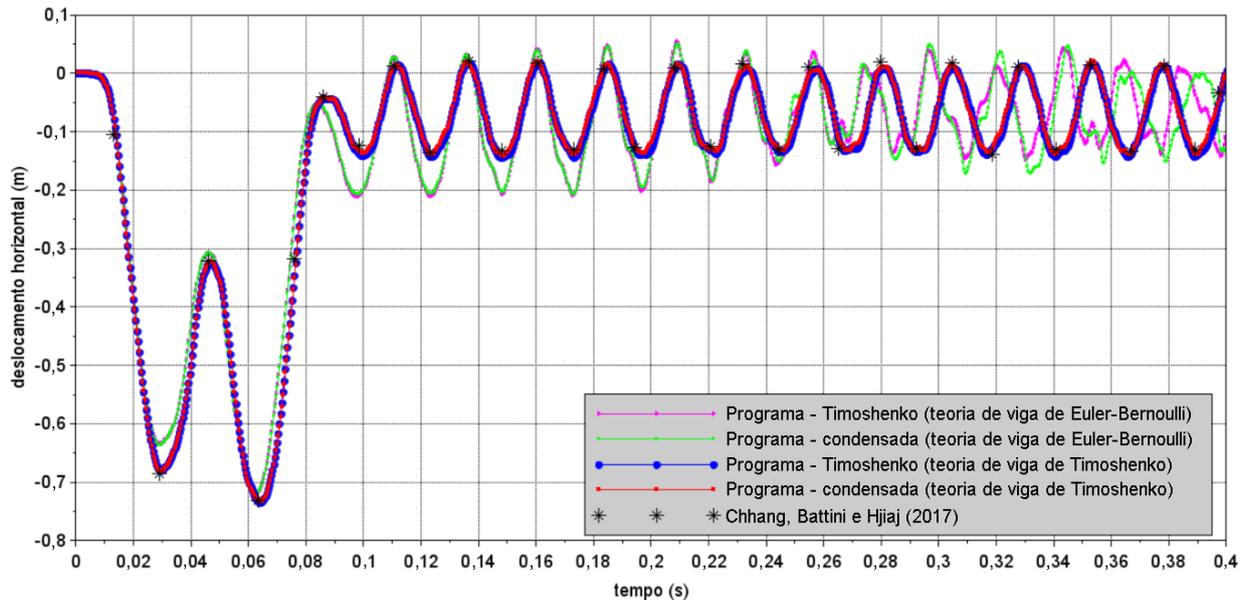


FIGURA 11: Viga biapoiada – curvas tempo *versus* deslocamento horizontal obtidas com o refinamento da malha de elementos finitos.

FONTE: Autoria Própria.

Na Figura 12 são apresentadas as análises com as formulações corrotacionais baseadas nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e com as diferentes matrizes de massa. Vê-se, nessa figura, que os resultados numéricos com a teoria de Timoshenko e com as matrizes de massa condensada e de Timoshenko têm boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Chhang, Battini e Hjjaj (2017).



**FIGURA 12:** Viga biapoiada – curvas tempo versus deslocamento horizontal sem o efeito do amortecimento.

**FONTE:** Autoria Própria.

As frequências naturais da viga biapoiada aparecem na Tabela 3, as quais são obtidas com a matriz de massa condensada e com as diferentes teorias de viga. Nota-se que a teoria clássica de Euler-Bernoulli para vibrações de flexão fornece valores de frequência mais elevados do que os obtidos pela Teoria de Timoshenko. Segundo Han, Benaroya e Wei (1999), o modelo de Euler-Bernoulli tende a superestimar ligeiramente as frequências naturais. Esse problema é agravado para as frequências naturais dos modos mais elevados. Além disso, as diferenças entre os modelos de viga diminuem monotonamente com o aumento do índice de esbelteza, que é definido pela razão entre o comprimento da viga e o raio de giração da seção transversal.

**TABELA 3:** Viga biapoiada – frequências naturais

Viga de Euler-Bernoulli			Viga de Timoshenko		
frequência	$\omega$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)	frequência	$\omega$ (rad/s)	$f_i$ (Hz)
1	152,3769	24,2515	1	148,3116	23,6045
2	560,4971	89,2058	2	549,8484	87,5111
3	607,6366	96,7083	3	560,4971	89,2058

**FONTE:** Autoria Própria

Estruturas sujeitas à excitação dinâmica estão permanentemente cedendo energia para o ambiente. Na ausência de reposição de energia, a vibração do sistema estrutural é reduzida gradualmente. Esse processo caracteriza o amortecimento. Uma análise adicional é realizada considerando esse processo. Neste trabalho, a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}_{el}$  do elemento finito é definida em função da matriz de massa  $\mathbf{M}_{Con}$  ou  $\mathbf{M}_{Tim}$ :

$$\mathbf{C}_{el} = 2c_m \mathbf{M}_{Con} \text{ ou } \mathbf{C}_{el} = 2c_m \mathbf{M}_{Tim} \quad \text{Eq. [48]}$$

Em que  $c_m$  é o coeficiente de amortecimento. Na Figura 13 são apresentadas as respostas não lineares dinâmicas com amortecimento considerando as formulações corrotacionais baseadas nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. As curvas são obtidas considerando o tempo máximo  $t = 0,3$  s e o coeficiente  $c_m = 20 \text{ s}^{-1}$ .

A estrutura, na Figura 13, passa de um estado vibratório para um estado em repouso, uma vez que há dissipação de energia. Comumente, os sistemas estruturais estão sujeitos a certo grau de amortecimento decorrente da perda de energia pelo atrito, ar e outras resistências. Se o amortecimento é fraco, a sua influência torna-se muito pequena e, usualmente, não é considerada no cálculo das frequências naturais. O amortecimento, no entanto, é de grande importância ao limitar a amplitude de oscilação na ressonância.

As Figuras 12 e 13 mostram que as duas teorias de viga apresentam deslocamentos semelhantes para os primeiros passos de tempo  $t$ , dada a proximidade das curvas tempo - deslocamento nesses gráficos. Contudo, com o decorrer do tempo, divergências nos traçados das curvas ficam mais aparentes, surgindo também diferenças nas frequências de vibração da viga entre as teorias.

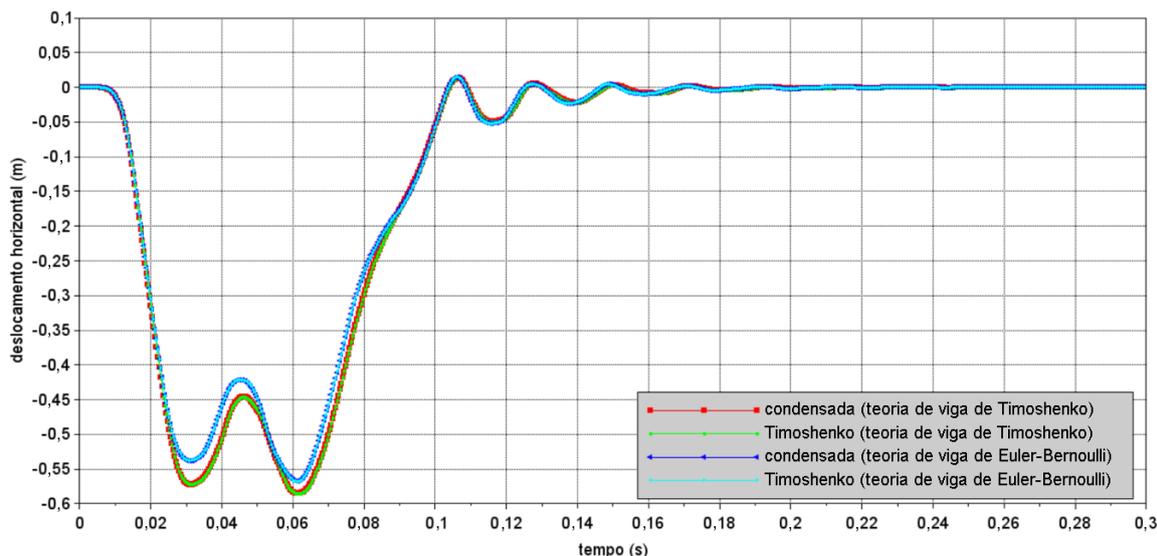


FIGURA 13: Viga biapoiada – curvas tempo *versus* deslocamento horizontal com o efeito do amortecimento.

FONTE: Autoria Própria.

## 5. CONCLUSÕES

Neste artigo, foi implementada computacionalmente uma formulação corrotacional do MEF para análise dinâmica transiente geometricamente não linear de vigas e pórticos planos. Além disso, as três primeiras frequências naturais dos sistemas estruturais estudados foram determinadas. O pseudoalgoritmo com o procedimento incremental e iterativo baseado no método de Newton-Raphson padrão e no método implícito de integração direta de Newmark, para obter a solução aproximada da equação diferencial do movimento, foi apresentado. Os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko foram usados para avaliar a matriz de rigidez e o vetor de força interna do sistema estrutural. Duas matrizes constantes de massa foram consideradas nas análises, quais sejam, a de massa condensada e a de Timoshenko.

Os resultados numéricos de três problemas dinâmicos encontrados na literatura demonstraram a efetividade e a acurácia do pseudoalgoritmo implementado com o programa livre Scilab. No que diz respeito às análises dinâmicas com a viga em balanço e o pórtico de Lee, as curvas de equilíbrio no espaço tempo *versus* deslocamento dessas estruturas mostraram uma melhor concordância com as soluções de referência quando se utilizou na análise a matriz de massa de Timoshenko.

Para vigas finas com grande relação comprimento/espessura, tanto o modelo de viga de Euler-Bernoulli quanto o modelo de viga de Timoshenko são idênticos, enquanto que para vigas espessas com pequena relação comprimento/espessura podem ser percebidas diferenças significativas. Tais diferenças ficaram evidentes na análise dinâmica da viga biapoiada com e sem amortecimento conforme as curvas

tempo *versus* deslocamento obtidas. O modelo de viga de Timoshenko produz resultados mais precisos devido à inclusão dos efeitos de cisalhamento.

Na dinâmica de estruturas, uma grande preocupação refere-se à ocorrência de vibrações excessivas, indesejáveis sob o prisma estrutural, que podem causar danos na estrutura devido à grande intensidade dos esforços solicitantes. Nesse sentido, destaca-se a importância da determinação das frequências naturais, visto que quando a frequência de uma carga dinâmica se iguala à frequência natural, inicia-se o fenômeno de ressonância amplificando as deformações da estrutura.

Os seguintes temas de pesquisa futura são sugeridos: a inclusão no modelo da ligação semirrígida de ligações viga-pilar; a implementação da não linearidade física, por meio das teorias da Mecânica do Dano e Elastoplasticidade; a adaptação da formulação para análise de estruturas aperticadas 3D; e a implementação de outros métodos de solução para a solução aproximada da equação diferencial do movimento, como os métodos  $\alpha$ -HHT,  $\alpha$ -WBZ e  $\alpha$ -Generalizado.

Por fim, este artigo apresenta como principal contribuição a importância da escolha adequada da matriz de massa e da consideração do efeito de cisalhamento na rigidez do sistema estrutural, no que se refere à análise dinâmica transiente de estruturas sob deslocamentos e rotações finitas.

## 6. AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV da Universidade Estadual de Maringá e à Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo apoio na realização desta pesquisa.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARRUDA, M. R. T.; CASTRO, L. M. S. **Structural dynamic analysis using hybrid and mixed finite element models**. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 57, 2012, 43-54 p.
- ARRUDA, M. R. T.; MOLDOVAN, D. I. **On a mixed time integration procedure for non-linear structural dynamics**. Engineering Computations, Vol. 32, n. 2, 2015, 329-369 p.
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- BATTINI, J. M. **Co-rotational beam elements in instability problems**. Doctoral thesis - Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002.
- BEHESHTI, A. **Large deformation analysis of strain-gradient elastic beams**. Computers & Structures, Vol. 177, 2016, 162-175 p.
- CHHANG, S.; BATTINI, J. M.; HJIAJ, M. **Energy-momentum method for co-rotational plane beams: A comparative study of shear flexible formulations**. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 134, 2017, 41-54 p.
- CHHANG, S.; SANSOUR, C.; HJIAJ, M.; BATTINI, J. M. **An energy-momentum co-rotational formulation for nonlinear dynamics of planar beams**. Computers & Structures, Vol. 187, 2017, 50-63 p.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1995.
- CHUNG, J.; YOO, H. H. **Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method**. Journal of Sound and vibration, Vol. 249, n. 1, 2002, 147-164 p.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 1995.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. **A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse**. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 91, 2014, 1-15 p.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1991.
- DENG, L.; ZHANG, Y. **A consistent corotational formulation for the nonlinear dynamic analysis of sliding beams**. Journal of Sound and Vibration, Vol. 476, 2020, 115298 p.
- DENG, L.; NIU, M. Q.; XUE, J.; CHEN, L. Q. **A two-dimensional corotational curved beam element for dynamic analysis of curved viscoelastic beams with large deformations and rotations**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2022.
- ELKARANSHAWY, H. A.; ELERIAN, A. A. H.; HUSSIEN, W. I. **A corotational formulation based on hamilton's principle for geometrically nonlinear thin and thick planar beams and frames**. Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2018, 2018.
- FERNANDES, W. L.; VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. **Dynamic instability in shallow arches under transversal forces and plane frames with semirigid connections**. Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2018, 2018.
- GALVÃO, A. S.; SILVA, A. R.; SILVEIRA, R. A.; GONÇALVES, P. B. **Nonlinear dynamic behavior and instability of slender frames with semi-rigid connections**. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 52, n. 12, 2010, 1547-1562 p.
- GRECO, M.; CODA, H. B. **Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis**. Journal of Sound and vibration, v. 290, n. 3-5, 2006, 1141-1174 p.
- HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. **Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories**. Journal of Sound and vibration, Vol. 225, n. 5, 1999, 935-988 p.
- IURA, M.; ATLURI, S. N. **Dynamic analysis of planar flexible beams with finite rotations by using inertial and rotating frames**. Computers & structures, Vol. 55, n. 3, 1995, 453-462 p.
- KIEN, N. D. **A Timoshenko beam element for large displacement analysis of planar beams and frames**. International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 12, n. 06, 2012, 1250048 p.
- KIM, W. **An improved implicit method with dissipation control capability: The simple generalized composite time integration algorithm**. Applied Mathematical Modelling, Vol. 81, 2020, 910-930 p.
- LE, T. N.; BATTINI, J. M.; HJIAJ, M. **Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams**. Computational Mechanics, Vol. 48, 2011, 153-161 p.
- LIU, T. Y.; LI, Q. B.; ZHAO, C. B. **An efficient time-integration method for nonlinear dynamic analysis of solids and structures**. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, Vol. 56, 2013, 798-804 p.
- MARTÍN, H.; MAGGI, C.; PIOVAN, M.; DE ROSA, A. **Natural vibrations and instability of plane frames: Exact analytical solutions using power series**. Engineering Structures, Vol. 252, 2022, 113663 p.
- MOUSSEMI, M.; NEZAMOLMOLKI, D.; AFTABI SANI, A. **Dynamic investigation of a two story-two span frame including semi-rigid Khorjini connections**. International Journal of Steel Structures, Vol. 17, 2017, 1471-1486 p.
- NETTO, A. B. R.; ARAUJO, R. R. **Comparação das frequências naturais e modos de vibração de vigas metálicas biapoçadas com uma e duas almas senoidais utilizando o ANSYS**. Projectus, Vol. 3, n. 1, 2018, 125-139 p.
- NEWMARK, N. M. **A method of computation for structural dynamics**. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 85, n. 3, 1959, 67-94 p.
- ORDAZ-HERNANDEZ, K.; FISCHER, X. **Fast reduced model of non-linear dynamic Euler–Bernoulli beam behaviour**. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 50, n. 8, 2008, 1237-1246 p.
- RAJASEKARAN, S. **Structural dynamics of earthquake engineering: theory and application using MATHEMATICA and MATLAB**. Elsevier, 2009.
- REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis Second Edition: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics**. OUP Oxford, 2014.
- RODRIGUES, R. O.; VENTURINI, W. S. **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, Vol. 7, n. 23, 2005, 61-93 p.

SCILAB, versão 2023.0.0. Dassault Systèmes, 2023.

URTHALER, Y.; REDDY, J. **A corotational finite element formulation for the analysis of planar beams**. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, n. 10, 2005, 553-570 p.

VIANA, H. F.; SILVA, R. G. L.; COSTA, R. S.; LAVALL, A. C. C. **Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method**. Engineering Structures, Vol. 223, 2020, 111197 p.

XU, C.; WANG, Z.; LI, H. **Direct FE numerical simulation for dynamic instability of frame structures**. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 236, 2022, 107732 p.

XUE, Q.; MEEK, J. L. **Dynamic response and instability of frame structures**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, n. 40-41, 2001, 5233-5242 p.

YAW, L. L. **2D Corotational Beam Formulation**. Walla Walla, USA: Walla Walla University, 2009.