



## 1. INTRODUÇÃO

A grande disponibilidade de recursos computacionais tem impulsionado o desenvolvimento das técnicas de otimização para auxílio na tomada de decisões de projeto. Os métodos de programação matemática, mais tradicionais, exigem domínios convexos e continuidade das variáveis de projeto, da função objetivo e das restrições. Além disso, a necessidade de avaliação da sensibilidade da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto muitas vezes dificulta sua aplicação. Assim, métodos heurísticos surgiram como alternativa de formulação e implementação mais simples para obtenção da solução de problemas.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e a implementação de uma metodologia para obtenção da configuração ótima de treliças considerando como restrições o equilíbrio da estrutura, os limites de resistência e deslocamento, a flambagem local das barras e o índice de confiabilidade. As variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras. O posicionamento das barras e os demais parâmetros de projeto são pré-definidos.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

Há uma grande diversidade de métodos heurísticos referentes à aplicação em problemas de otimização em vários campos da ciência e em particular na engenharia. Grande parte desses métodos baseia-se em observações da natureza. O trabalho recente de Medeiros e Kripka (2012) apresenta uma boa revisão sobre os métodos aplicados com sucesso em otimização estrutural. Algoritmos genéticos foram utilizados por Silva, Melo e Parente Jr (2009) para otimização do comportamento de placas na indústria de petróleo e por Gerhardt (2011) para dimensionamento de estruturas mecânicas. Já Coelho e Tavares Neto (2004) utilizam o algoritmo de colônia de formigas na otimização de sistemas de produção, enquanto Koide (2010) aplica esse mesmo método para desenvolvimento de materiais compósitos

laminados. Algoritmos baseados em inteligência de enxames (*swarm intelligence*), entre eles o algoritmo de otimização por enxame de partículas (KENNEDY; EBERHART, 1995 e LEE; GEEM, 2004) e o algoritmo de colônia de formigas (COLORNI; DORIGO; MANIEZZO, 1991 e CAMP; BICHON, 2004), foram utilizados para minimização do peso de estruturas que envolvem variáveis contínuas e discretas.

Na área de mecânica estrutural existem profundos debates quanto ao uso de métodos heurísticos para solução de problemas quando métodos de programação matemática também podem ser empregados. Sonmez (2011) apresentou uma aplicação do método de colônia de abelhas, também aplicado anteriormente por Karaboga e Basturk (2007a, 2007b, 2008) para projeto ótimo de treliças em regime elástico linear, no problema de minimização de peso. Segundo o autor, seus resultados em quatro problemas padrão mostram que o algoritmo é efetivo, eficiente e robusto para essa classe de problemas. Logo depois, através do mesmo veículo, Stolpe (2011) contesta a conclusão de Sonmez (2011) e afirma que os exemplos apresentados não são particularmente desafiadores e que o algoritmo de colônia artificial de abelhas apresentado é ineficiente nos referidos exemplos quando comparados com três outros métodos heurísticos. Ressalta ainda que as aplicações por ele apresentadas foram executadas com menos avaliações das funções e menos tempo computacional.

Embora os comentários de Stolpe (2011) sejam pertinentes, os autores deste trabalho consideram que os métodos heurísticos são de grande ajuda em pesquisas iniciais no campo da otimização, fornecem um panorama melhor da natureza do problema e auxiliam investigações iniciais. Por isso, apesar da comprovada eficiência do uso de programação matemática em problemas de otimização, neste trabalho foi utilizada uma aplicação do algoritmo de *Branch and Bound* para o problema de otimização de treliças na qual se considera a natureza aleatória das grandezas envolvidas no projeto como parâmetros de carga e de resistência.

A análise de confiabilidade tem sido utilizada na fase pós-dimensionamento com o objetivo de avaliar a probabilidade de falha de uma estrutura, levando em conta as diversas incertezas inerentes às grandezas consideradas em projeto. Esse tipo de estudo adquiriu tal importância que o editorial da revista *Structure Magazine* em março de 2010 definiu ciclo de vida, segurança, confiabilidade e análise de risco como os atuais grandes desafios da engenharia (FRANGOPOL; ELLINGWOOD, 2010).

Na engenharia civil, Pulido, Jabos e Prates De Lima (1992) apresentaram a análise de confiabilidade de estruturas com comportamento elasto-plástico. Gomes (2001) tratou do efeito da variabilidade espacial das propriedades do concreto sobre a confiabilidade de vigas de concreto armado. Silva, Melo e Parente Jr. (2003) apresentaram um estudo de caso sobre a corrosão da armadura numa viga de ponte de concreto armado e a probabilidade de falha da estrutura. Barbosa, Freitas e Neves (2005) aliaram a análise de confiabilidade à técnica de redes neurais para substituição de modelos complexos por modelos simplificados. Mais recentemente, Corelhano, Corrêa e Beck (2012) apresentaram um estudo sobre a confiabilidade de edifícios no estado limite de serviço, com função de falha relativa aos deslocamentos horizontais máximos. A inclusão da possibilidade de falha como restrição a ser atendida em um problema de otimização tem sido considerada por vários autores como Tu e Choi (1999), Yang e Gu (2004), Lopez e Beck (2012), dentre outros.

### 3. METODOLOGIA

Neste trabalho emprega-se o algoritmo de *Branch and Bound*, um método heurístico que remete à ramificação de uma árvore, para obtenção da solução ótima. Esse algoritmo tem sido adotado em diversas publicações recentes na engenharia elétrica (REIS, 2007 e ROCHA; ASSIS, 2009), na engenharia de produção (RONCONI; KAWAMURA, 2011) e na engenharia de estruturas (CERVEIRA et

al., 2013). A metodologia para análise de confiabilidade baseia-se no método de Monte Carlo (MMC), método utilizado por diversos autores (e.g. PULIDO; JACOBS; PRATES DE LIMA, 1992 e BARBOSA; FREITAS; NEVES, 2005). Estuda-se a influência de dois tipos de variáveis estocásticas, a resistência do material utilizado e as cargas externas atuantes.

O problema de otimização é descrito como na Equação 1, e tem como variáveis de projeto as áreas,  $A_i$ , das seções transversais das barras da treliça, admitidas nessa implementação com valores discretos. O conjunto das barras é subdividido em grupos com as barras de cada grupo associadas a uma das variáveis de projeto. A função objetivo representa o volume total de material e as restrições impostas refletem, além do equilíbrio da estrutura, os limites de resistência em compressão e em tração, o limite de flambagem nas barras comprimidas, e limites para deslocamentos nodais impostos em nós especificados pelo projetista.

$$\begin{aligned}
 &\text{Obter} && \mathbf{A} = \langle A_1 \quad \dots \quad A_n \rangle^T \\
 &\text{que minimiza} && Vol(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{NB} A_i L_i \\
 &\text{tal que} && \mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{U}(\mathbf{A}) = \mathbf{F} \\
 &&& \sigma_i(\mathbf{A}) \geq \bar{\sigma}_c \\
 &&& \sigma_i(\mathbf{A}) \leq \bar{\sigma}_T \\
 &&& -N_i(\mathbf{A}) \leq \bar{N}_i \\
 &&& |U_m(\mathbf{A})| \leq \bar{U}_m \\
 &&& PF \leq IA
 \end{aligned} \tag{Eq.[1]}$$

#### Em que:

- $\mathbf{A}$  - é o vetor das variáveis de projeto;
- $A_i$  - é a área da seção transversal do elemento  $i$ ;
- $n$  - é o número de grupos de barras da treliça;
- $Vol$  - é o volume total da treliça;
- $L_i$  - é o comprimento da barra  $i$ ;
- $NB$  - é o número de barras da treliça;
- $\mathbf{K}$  - é a matriz de rigidez da estrutura;
- $\mathbf{U}$  - é o vetor de deslocamentos nodais;
- $\mathbf{F}$  - é o vetor de forças nodais;
- $\sigma_i$  - é a tensão na barra  $i$ , positiva para tração, e negativa para compressão;
- $\sigma_T$  - é a tensão admissível à tração do material do elemento  $i$ ;

- $\sigma_c$  - é a tensão admissível à compressão do material do elemento  $i$ ;
- $N_i$  - é o esforço normal atuante no elemento  $i$  (quando sujeito a compressão, somente);
- $\underline{N}_i$  - é o esforço normal de flambagem do elemento  $i$ , sujeito a compressão;
- $U_m$  - é o deslocamento do nó  $m$ , na direção  $x$  ou  $y$ ;
- $\underline{U}_m$  - é o valor limite para esse deslocamento;
- $PF$  - é a probabilidade de falha;
- $IA$  - é o índice de confiabilidade alvo.

### 3.1 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE TRELIÇAS

A análise de confiabilidade aplicada ao projeto de estruturas pressupõe a obtenção do índice de confiabilidade ou da probabilidade de falha de uma estrutura. Para tanto, este trabalho emprega o método de Monte Carlo, uma técnica numérica usada para realizar experimentos computacionais sobre o comportamento de modelos nas mais diversas áreas de conhecimento. Em todos os casos considera-se o comportamento elástico do material e estabelece-se como limite de resistência a tensão de plastificação.

Para a análise de confiabilidade, uma das abordagens possíveis é tratar o problema em função de sua resistência ( $R$ ) em vista à sua solicitação ( $S$ ). Assim, o evento ( $R \geq S$ ) corresponde ao êxito do sistema, enquanto ( $R < S$ ) representa a falha. A partir dessa abordagem, as restrições de tensão (Equação 2), flambagem (Equação 3) e deslocamentos específicos (Equação 4) podem ser descritas como:

$$G_i(\mathbf{A}) = \bar{\sigma} - \sigma_i, i = 1 \dots nb \quad \text{Eq.}[2]$$

$$G_j(\mathbf{A}) = \bar{N}_j - N_j, j = 1 \dots nbc \quad \text{Eq.}[3]$$

$$G_k(\mathbf{A}) = \bar{U}_k - U_k, k = 1 \dots nd \quad \text{Eq.}[4]$$

Sendo:

- $nb$  - o número de barras da treliça;
- $nbc$  - o número de barras comprimidas;
- $nd$  - o número de deslocamentos observados no sistema.

### 3.2 MÉTODO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo é um método de simulação computacional para análise

de confiabilidade. Para tanto, representa-se um sistema físico ou matemático através de funções de distribuição de probabilidade adequadas ao problema e com elas gera-se uma amostra aleatoriamente. Para cada ponto amostral calcula-se a função de falha, e esse é classificado como falho ou seguro. A probabilidade de falha,  $P_f$ , é então calculada por meio da Equação 5.

$$P_f = \frac{\sum_{j=1}^N I}{N} \quad \text{Eq.}[5]$$

Sendo:

$N$  - o tamanho da amostra de números aleatórios;

$I$  - a função indicadora, tal que:

$$I = 1, \text{ se } G(x) \leq 0 \quad \text{Eq.}[6]$$

$$I = 0, \text{ se } G(x) \geq 0 \quad \text{Eq.}[7]$$

A simulação de Monte Carlo fornece uma probabilidade de falha aproximada. A teoria das probabilidades garante que a comparação direta entre os termos oferece uma boa aproximação de probabilidade de falha se o número  $N$  de pontos gerados for grande o suficiente.

### 3.3 ALGORITMO DE BRANCH AND BOUND APLICADO AO PROBLEMA

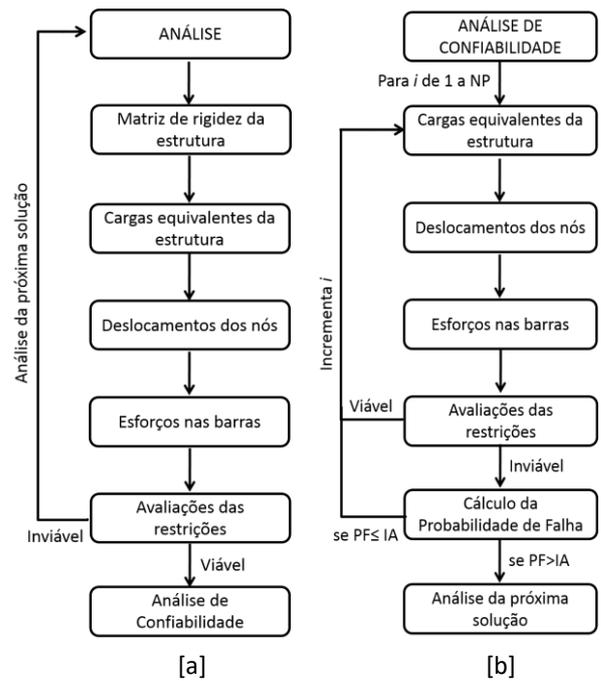
No tipo de problema analisado neste trabalho, o número de combinações é geralmente muito grande e aumenta com o aumento do número de grupos de barras, com o número de possibilidades de seções para cada grupo e com a complexidade da estrutura. O número de avaliações a serem feitas por um algoritmo de força bruta gera um custo computacional muito grande. O algoritmo *Branch and Bound* é uma técnica de otimização interessante para esse tipo de problema, uma vez que reduz o número de análises a serem feitas, a partir da poda de soluções não promissoras. Sua execução é semelhante à ramificação de uma árvore, dividida em níveis, com duas premissas básicas: evitar o desenvolvimento total da árvore pela poda dos ramos não promissores e desenvolver primeiro os nós mais promissores.

A execução do algoritmo *Branch and*

*Bound* parte do conjunto de todas as soluções possíveis, dividido em subconjuntos denominados nós. O desenvolvimento de um nó engloba a avaliação do valor da função objetivo de todos os elementos do nó, a correspondente obtenção da melhor solução do nó e a verificação da viabilidade da melhor solução do nó e este recebe a classificação correspondente à sua melhor solução. Observa-se que, como o volume da estrutura é função direta das variáveis de projeto, a avaliação da função objetivo tem um custo computacional muito inferior ao da avaliação das restrições, que demandam a análise da estrutura, a qual só é feita uma vez para cada nó da árvore.

Na Figura 1 apresenta-se o fluxograma do procedimento implementado neste trabalho, na qual: *NP* é o número de pontos informado pelo usuário para a análise de confiabilidade, *PF* é a probabilidade de falha, e *IA* é o índice de confiabilidade alvo.

O desenvolvimento do primeiro nível da árvore corresponde à separação em subconjuntos de acordo com os valores possíveis do primeiro grupo de barras. Assim, o número de soluções do primeiro nível será igual ao número de possibilidades de valores de seção transversal. Após o desenvolvimento do primeiro nível da árvore, as soluções são comparadas entre si. A solução viável que detém o menor volume da estrutura é armazenada e a essa solução é confrontada com as melhores soluções dos nós não viáveis. Uma solução não viável é chamada promissora quando apresenta volume inferior ao volume da solução viável armazenada. Assim, os nós promissores geram novos ramos de soluções e dão origem a outras soluções e a outros níveis da árvore de soluções do algoritmo. Os nós não promissores são aqueles não viáveis que apresentam volume total da estrutura maior que o volume da solução viável ao qual é comparado. Esses sofrem podas e, portanto, não originam outras soluções. Dessa forma, reduz-se o número de análises. O processo iterativo segue até que não haja mais nós promissores a serem desenvolvidos.



**FIGURA 1.** Fluxograma da função de análise de treliças utilizada neste trabalho: [a] primeira etapa, sem análise de confiabilidade; [b] segunda etapa, com análise de confiabilidade. **Fonte:** Autoria própria.

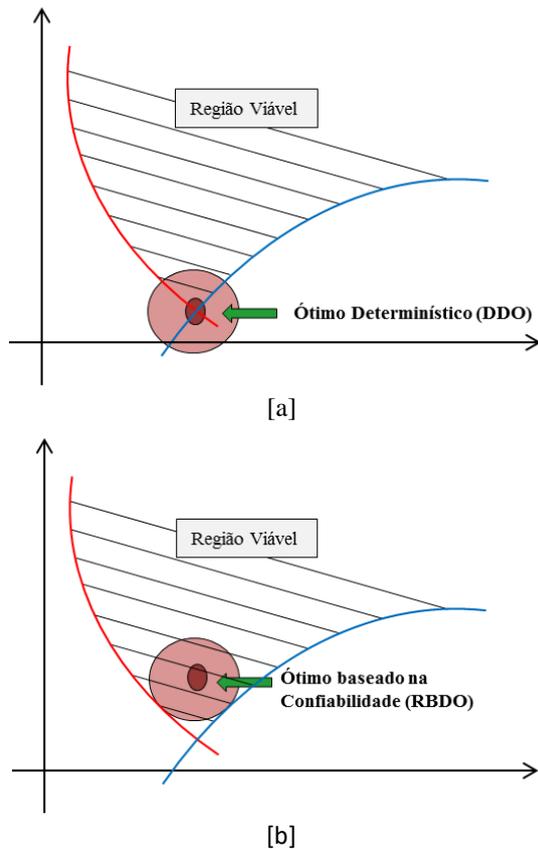
Neste trabalho a avaliação das restrições de projeto respeita uma hierarquização que busca diminuir o custo computacional. Assim, faz-se inicialmente análise da solução segundo as cinco primeiras restrições da Equação 1 na seguinte ordem: equilíbrio da estrutura; atendimento ao limite de deslocamentos; atendimento aos limites de tensão à compressão e à tração; e impedimento de flambagem das barras comprimidas. Caso essa análise classifique a solução como viável, é feita avaliação da restrição de confiabilidade da estrutura.

### 3.4 OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE

A otimização baseada em confiabilidade tem como restrição adicional a probabilidade de falha de uma estrutura ser menor que um índice alvo, representado pela última restrição da Equação 1. A Figura 2(a) ilustra a solução ótima de um processo de otimização determinística.

Pela natureza da solução, o índice de confiabilidade da solução ótima é geralmente abaixo do prescrito por normas de segurança.

A inserção de restrições estabelece um valor mínimo aceitável para o índice de confiabilidade da estrutura e faz com que a solução se desloque para dentro da região viável, como mostrado na Figura 2(b).



**FIGURA 2.** Representação esquemática da solução ótima: [a] na otimização determinística; [b] na otimização probabilística. **Fonte:** Luiz E. Vaz (sd.)

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES: EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

São apresentadas nesta seção as avaliações da otimização determinística (sem

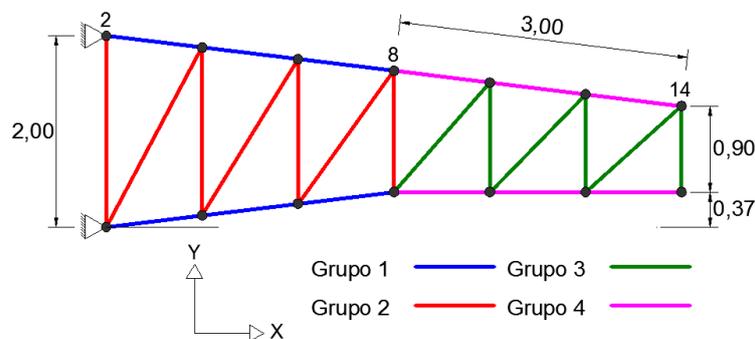
análise de confiabilidade) e da otimização probabilística (com análises de confiabilidade) de três conformações de treliças, uma plana e duas espaciais. As barras das treliças foram agrupadas segundo o normalmente adotado para esse tipo de estrutura. Em todos os casos, o material tem comportamento elástico linear e a análise de resistência considera apenas os limites de tensão admissível. Para avaliação da confiabilidade da solução ótima da otimização determinística de cada exemplo, foram implementadas três possibilidades de avaliação da probabilidade de falha: a primeira considera apenas a aleatoriedade das cargas, a segunda considera apenas a aleatoriedade da resistência e a terceira considera a aleatoriedade das cargas e da resistência.

##### 4.1 EXEMPLO 1: APLICAÇÃO PARA TRELIÇA PLANA

Na Figura 3 apresenta-se uma treliça plana com 25 barras, na qual o ângulo de inclinação das barras superiores é igual ao ângulo de inclinação das 3 primeiras barras inferiores. As barras da treliça foram divididas em 4 grupos, identificados pelas cores apresentadas na Figura 3.

Os nós 2, 8 e 14 recebem as cargas verticais apresentadas na Tabela 1, as quais são classificadas em permanente (P) e acidental (A). O material utilizado tem módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 200 GPa. Foi estabelecido um limite de deslocamento de 53,0 mm na direção Y para o último nó à direita das barras inferiores.

Para a análise determinística utiliza-se o valor 435 MPa para tensão admissível de tração ou compressão, e os valores das cargas aplicadas são mostrados na Tabela 1.



**FIGURA 3.** Treliça plana com 25 barras.

**Fonte:** Autoria própria.

Para a análise probabilística, a tensão admissível é de 560 MPa, e as cargas aplicadas e seus respectivos desvios padrões são mostradas na Tabela 2. Os pontos amostrais da análise de confiabilidade foram gerados para uma distribuição tipo normal para as cargas permanentes, Gumbel para as cargas acidentais e lognormal para as resistências, conforme o caso.

Os valores apresentados na Tabela 1 correspondem aos valores característicos das

cargas. Na otimização determinística, esses valores foram majorados pelo coeficiente 1,4, conforme prática usual de projeto. A tensão admissível indicada também corresponde a um valor característico e o valor de projeto foi obtido pela minoração da resistência com o coeficiente 1,15, também usual em projeto.

As Tabelas 3 e 4 mostram as possibilidades de seções transversais de cada grupo.

**TABELA 1:** Valores característicos do carregamento da treliça do exemplo 1.

Nó	F <sub>x</sub> (kN)	F <sub>y</sub> (kN)	Tipo
2	0,0	-30,6	P
8	0,0	-61,2	P
14	0,0	-30,6	P
2	0,0	-19,4	A
8	0,0	-38,8	A
14	0,0	-19,4	A

Fonte: Autoria própria.

**TABELA 2.** Valores médios e desvio padrão do carregamento para a análise probabilística da treliça do exemplo 1.

Nó	F <sub>x</sub> (kN)	dF <sub>x</sub> (kN)	F <sub>y</sub> (kN)	dF <sub>y</sub> (kN)	Tipo
2	0,00	0,00	-20,00	2,00	P
8	0,00	0,00	-40,00	4,00	P
14	0,00	0,00	-20,00	2,00	P
2	0,00	0,00	-12,70	3,74	A
8	0,00	0,00	-25,40	7,48	A
14	0,00	0,00	-12,70	3,74	A

Fonte: Autoria própria.

**Tabela 3.** Áreas disponíveis para cada grupo de barras da treliça do exemplo 1.

Grupo	Área (x10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> )			
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub> (m <sup>2</sup> )	A <sub>4</sub> (m <sup>2</sup> )
1	7,0450	7,2290	8,2938	10,0140
2	2,5620	3,1604	3,5202	5,2779
3	1,5394	1,9635	2,1630	3,3929
4	1,8630	3,1604	3,3929	3,5814

Fonte: Autoria própria.

**TABELA 4.** Momentos de Inércia para cada grupo de barras da treliça do exemplo 1.

Grupo	Momento de Inércia ( $\times 10^{-8} \text{ m}^4$ )			
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$
1	10,850	48,310	20,440	23,310
2	21,300	39,980	24,560	20,750
3	4,620	9,590	12,820	12,380
4	8,190	39,98	12,380	14,560

Fonte: Autoria própria.

A solução ótima da otimização determinística foi a combinação [2; 2; 2; 2], ou seja, áreas da seção transversal com  $7,2290 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $3,1604 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $1,9635 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e  $3,1604 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  para as áreas dos grupos de barras 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Foram avaliadas apenas 127 soluções, dentre as 256 possíveis. Das soluções analisadas, somente 15 eram viáveis. Apesar de o número de análises ser alto em comparação com as implementações típicas do algoritmo de *Branch and Bound*, 49,6% das soluções, o tempo de execução foi de apenas 2,5 segundos. O volume de material para essa solução foi de  $0,0115 \text{ m}^3$ .

A seguir, foram analisadas as probabilidades de falha da solução ótima determinística. Foram analisadas três possibilidades de aleatoriedade das variáveis:

apenas a resistência como aleatória; apenas as cargas como aleatórias; e cargas e resistência aleatórias. Para geração dos pontos amostrais do Método de Monte Carlo os valores aleatórios são tomados pelo seu valor médio e consideram o correspondente desvio padrão, conforme apresentado na Tabela 2. A Tabela 5 indica a probabilidade de falha da solução ótima para as 3 possibilidades avaliadas. Em todos os casos foram utilizados 1.000.000 pontos amostrais. O resultado apresentado nesta tabela mostra uma probabilidade de falha da solução ótima muito acima do recomendado, que gira em torno de  $10^{-5}$ . Isso evidencia a necessidade de consideração da aleatoriedade das variáveis já no processo de otimização. Mostra ainda que a aleatoriedade das cargas tem influência muito maior na probabilidade de falha que a aleatoriedade da resistência.

**TABELA 5.** Probabilidades de Falha da solução ótima determinística da treliça do exemplo 1.

Combinação	PF (%)
Aleatoriedade apenas da resistência	0,015
Aleatoriedade apenas das cargas	0,088
Aleatoriedade de cargas e resistência	0,089

Fonte: Autoria própria.

A seguir, foi feita uma otimização não determinística, na qual se considera a aleatoriedade das cargas e das resistências. Impôs-se uma probabilidade de falha alvo de 0,001% e a análise de confiabilidade foi feita com 1.000.000 pontos amostrais. A análise de confiabilidade foi a última restrição a ser analisada, por demandar maior esforço computacional.

A solução ótima probabilística foi a combinação [3; 2; 3; 3], ou seja,  $8,2938 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ;  $3,1604 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $2,1630 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e  $3,3929 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  são as melhores áreas para os grupos de barras 1, 2, 3 e 4, respectivamente. A probabilidade de falha da solução ótima foi de 0,001%. O volume de material para essa solução foi de  $0,0125 \text{ m}^3$ . Assim, a relação entre os volumes de material da solução ótima probabilística pela solução ótima determinística é de 1,087.

Foram analisadas 169 soluções dentre as 256 possíveis. Dentre essas, 133 foram classificadas como inviáveis por violarem alguma das demais restrições, sem necessidade de análise de confiabilidade. Dentre as 36 soluções que atenderam às restrições determinísticas, 25 foram classificadas como inviáveis pela análise de confiabilidade. A inclusão da análise de confiabilidade elevou consideravelmente o tempo de execução que totalizou um pouco mais de 25 horas, devido à necessidade de 36.000.000 análises.

## 4.2 EXEMPLO 2: APLICAÇÃO PARA TORRE DE TRANSMISSÃO

Na Figura 4 apresenta-se uma treliça espacial com 25 barras, comumente utilizada como torre de transmissão. É apresentada a divisão das barras em 6 grupos, separados pelas cores indicadas. Para esse caso foi adotado material com módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 68,9 GPa. Os nós 1 e 2 possuem controle de deslocamento na direção  $Y$ , com limite máximo em 9,0 mm para ambos.

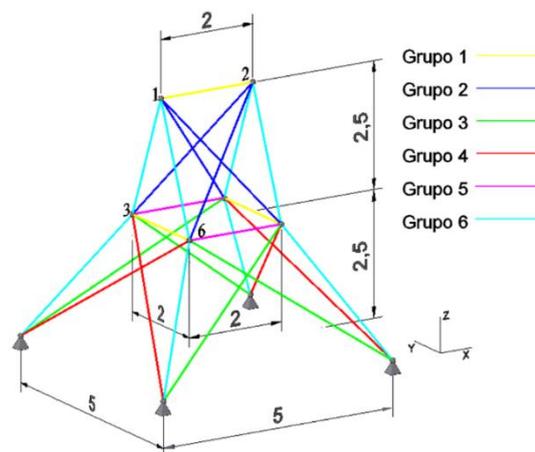


FIGURA 4. Treliça espacial com 25 barras.

Fonte: Autoria própria.

O valor característico da tensão admissível do material utilizado é de 276 MPa para a otimização determinística e 355 MPa, com desvio padrão de 3%, para a otimização probabilística. A Tabela 6 informa, para cada caso, os valores característicos das cargas aplicadas aos nós 1, 2, 3 e 6 da torre, enquanto que a Tabela 7 informa os valores médios e os respectivos desvios padrão.

TABELA 6. Valores característicos do carregamento da treliça do exemplo 2.

Nó	F <sub>x</sub> (kN)	F <sub>y</sub> (kN)	F <sub>z</sub> (kN)	Tipo
1	3,06	-30,60	-30,60	P
2	0,00	-30,60	-30,60	P
3	1,53	0,00	-30,60	P
6	1,84	0,00	0,00	P
1	1,39	-13,90	-13,90	A
2	0,00	-13,90	-13,90	A
3	0,69	0,00	0,00	A
6	0,84	0,00	0,00	A

Fonte: Autoria própria.

**TABELA 7.** Valores médios e desvio padrão do carregamento da treliça do exemplo 2.

Nó	F <sub>x</sub> (kN)	dF <sub>x</sub> (kN)	F <sub>y</sub> (kN)	dF <sub>y</sub> (kN)	F <sub>z</sub> (kN)	dF <sub>z</sub> (kN)	Tipo
1	2,00	0,20	-20,00	2,00	-20,00	2,00	P
2	0,00	0,00	-20,00	2,00	-20,00	2,00	P
3	1,00	0,10	0,00	2,00	-20,00	2,00	P
6	1,20	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	P
1	0,91	0,27	-9,09	2,70	-9,09	2,70	A
2	0,00	0,00	-9,09	2,70	-9,09	2,70	A
3	0,45	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	A
6	0,55	0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	A

Fonte: Autoria própria.

Nas Tabelas 8 e 9 são indicadas, respectivamente, as possibilidades de áreas e momentos de inércia para cada grupo de barras da torre.

**TABELA 8.** Áreas disponíveis para cada grupo de barras da treliça do exemplo 2.

Grupo	Área (x10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> )		
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
1	0,3226	0,6452	0,9678
2	0,6452	1,2900	3,2260
3	4,5160	6,4520	9,0330
4	3,8710	5,1620	7,7420
5	16,1300	16,7700	17,4200
6	19,3600	20,6400	21,2900

Fonte: Autoria própria.

**TABELA 9.** Momentos de Inércia para cada grupo de barras da treliça do exemplo 2.

Grupo	Momento de Inércia (x10 <sup>-7</sup> m <sup>4</sup> )		
	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>
1	0,2830	0,5660	0,8490
2	0,5660	1,1320	2,8310
3	3,9630	5,6220	7,9260
4	3,3970	4,5290	6,7940
5	14,1500	14,7200	15,2900
6	16,9800	18,1200	18,6800

Fonte: Autoria própria.

A solução ótima da otimização determinística foi a combinação [1; 2; 1; 2; 1; 1], ou seja, as áreas dos grupos de barras 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são, em  $m^2$ ,  $3,226 \times 10^{-5}$ ;  $1,290 \times 10^{-4}$ ;  $4,516 \times 10^{-4}$ ;  $5,162 \times 10^{-4}$ ;  $1,613 \times 10^{-3}$  e  $1,936 \times 10^{-3}$ , respectivamente. Das 729 soluções possíveis, foram avaliadas 103, dentre as quais apenas 6 viáveis. O número de análises, 14,1%, é compatível com o algoritmo de *Branch and Bound* (em torno de 10%). O tempo de execução foi de apenas 2,0 s. O volume de material dessa solução é de  $0,0722 m^3$ .

A seguir, foram analisadas as probabilidades de falha da solução ótima determinística considerando três possibilidades de aleatoriedade das variáveis: apenas a resistência; apenas as cargas; e cargas e resistência aleatórias. Os pontos amostrais foram gerados para uma distribuição normal para as cargas permanentes, gumbel para as cargas acidentais e lognormal para as resistências. Foram utilizados 1.000.000 pontos amostrais no caso em que se considerou a aleatoriedade apenas da resistência. Devido ao custo computacional, o número de pontos amostrais foi reduzido para 100.000 nos outros dois casos.

A Tabela 10 indica as probabilidades de falha da solução ótima da otimização determinística para as 3 possibilidades avaliadas. O resultado mostra que a solução ótima deste exemplo não é sensível à aleatoriedade da resistência. No entanto, a aleatoriedade das cargas conduz a uma probabilidade de falha da solução ótima muito acima do recomendado.

Como no exemplo anterior, foi feita uma otimização probabilística com aleatoriedade das cargas e das resistências. Impôs-se uma probabilidade de falha alvo de 0,001% e 1.000.000 pontos amostrais. A análise de confiabilidade foi a última restrição a ser analisada, por demandar maior esforço computacional.

A solução ótima não determinística do problema foi a combinação [2; 2; 3; 2; 2; 3], ou seja, para os grupos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 as melhores áreas são, em  $m^2$ ,  $6,452 \times 10^{-5}$ ;  $1,290 \times 10^{-4}$ ;  $9,033 \times 10^{-4}$ ;  $5,162 \times 10^{-4}$ ;  $1,677 \times 10^{-3}$  e  $2,129 \times 10^{-3}$ , respectivamente. A probabilidade de falha da solução ótima foi de 0,0004%. O volume de material é de  $0,0855 m^3$ . Dessa forma, a razão entre o volume de material da solução ótima probabilística pelo volume da solução ótima determinística resulta 1,184.

O algoritmo de *Branch and Bound* realizou 691 avaliações de restrições. Esse número representa 94,8% das 729 soluções possíveis e é muito alto em relação ao comumente encontrado na literatura. Das soluções analisadas, 405 se mostraram inviáveis já nas restrições determinísticas, e não passaram pela análise de confiabilidade. Dentre as 286 soluções classificadas como viáveis em relação às restrições determinísticas, somente 24 foram viáveis também em relação à restrição de confiabilidade. A inclusão da análise de confiabilidade elevou consideravelmente o tempo de execução, totalizando um pouco mais de 114 horas.

**TABELA 10:** Probabilidades de Falha da solução ótima determinística da treliça do exemplo 2.

Combinação	PF (%)
Aleatoriedade apenas da resistência	0,000
Aleatoriedade apenas das cargas	1,200
Aleatoriedade de cargas e resistência	1,200

Fonte: Autoria própria.

### 4.3 EXEMPLO 3: APLICAÇÃO AO SISTEMA DE CONTRAVENTAMENTO DE EDIFÍCIO

Na Figura 5 apresenta-se uma treliça espacial em formato do sistema de contraventamento de prédios. A treliça conta com 72 barras divididas em 8 grupos, separados pelas cores. O material tem módulo de elasticidade ( $E$ ) igual a 68,9 GPa, foi estabelecido controle de deslocamento no nó 1, nas direções  $X$  e  $Y$ , ambos limitados ao máximo de 6,7 mm.

Para a análise determinística o valor característico das tensões admissíveis de tração e compressão do material é de 159 MPa. Os valores característicos das cargas aplicadas aos nós superiores da treliça são fornecidos na Tabela 11. Para a análise probabilística as tensões admissíveis de tração e compressão do material são de 205 MPa, com desvio padrão de 3% desse valor. As

cargas aplicadas à treliça são indicadas na Tabela 12, juntamente com seus respectivos desvios padrões.

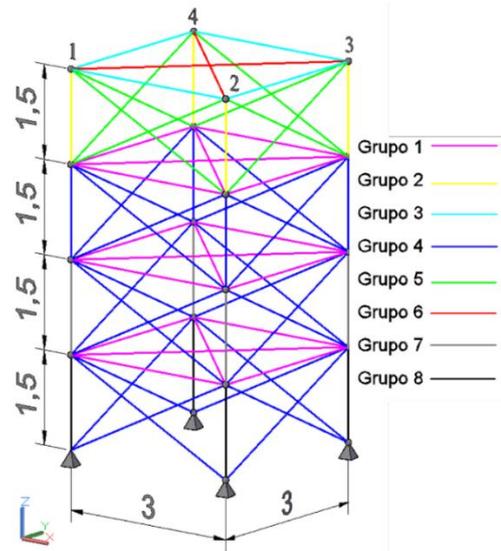


FIGURA 5. Torre treliçada espacial com 72 barras.

Fonte: Autoria própria.

TABELA 11: Valores característicos do carregamento da treliça do exemplo 3.

Nó	$F_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$F_z$ (kN)	Tipo
1	15,30	15,30	-30,60	P
2	0,00	0,00	-15,30	P
3	0,00	0,00	-15,30	P
4	0,00	0,00	-15,30	P
1	6,94	6,94	-13,90	A
2	0,00	0,00	-6,94	A
3	0,00	0,00	-6,94	A
4	0,00	0,00	-6,94	A

Fonte: Autoria própria.

TABELA 12. Valores médios e desvio padrão do carregamento da treliça do exemplo 3.

Nó	$F_x$ (kN)	$dF_x$ (kN)	$F_y$ (kN)	$dF_y$ (kN)	$F_z$ (kN)	$dF_z$ (kN)	Tipo
1	10,00	1,00	10,00	1,00	-20,00	2,00	P
2	0,00	0,00	0,00	0,00	-10,00	1,00	P
3	0,00	0,00	0,00	0,00	-10,00	1,00	P
4	0,00	0,00	0,00	0,00	-10,00	1,00	P
1	4,54	1,35	4,54	1,35	-9,09	2,70	A
2	0,00	0,00	0,00	0,00	-4,54	1,35	A
3	0,00	0,00	0,00	0,00	-4,54	1,35	A
4	0,00	0,00	0,00	0,00	-4,54	1,35	A

Fonte: Autoria própria.

Nas Tabelas 13 e 14 são indicadas as possibilidades de áreas e momentos de inércia, respectivamente, para cada grupo de barras da treliça espacial.

A solução ótima da otimização determinística foi a combinação [1; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 1], ou seja, as áreas dos grupos de barras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 são, em  $m^2$ ,  $5,807 \times 10^{-5}$ ;  $2,129 \times 10^{-4}$ ;  $2,516 \times 10^{-4}$ ;  $3,097 \times 10^{-4}$ ;  $3,355 \times 10^{-4}$ ;  $4,065 \times 10^{-4}$ ;  $7,871 \times 10^{-4}$  e  $1,115 \times 10^{-3}$ , respectivamente. Das 6561 soluções possíveis, foram avaliadas para a análise estrutural 89, ou seja, 1,36%. Das soluções analisadas, 27 se apresentaram viáveis. O tempo de execução foi de apenas 6,0 segundos.

A seguir, foram analisadas as probabilidades de falha da solução ótima determinística. Como nos exemplos anteriores,

foram analisadas três possibilidades de aleatoriedade das variáveis: apenas a resistência como aleatória; apenas as cargas como aleatórias; e cargas e resistência aleatórias.

Os pontos amostrais da análise de confiabilidade foram gerados para uma distribuição tipo normal para as cargas permanentes, gumbel para as cargas acidentais e lognormal para as resistências, conforme o caso. Foi utilizado o Método de Monte Carlo com a geração de 100.000 pontos amostrais para cada variável aleatória. As probabilidades de falha da solução ótima determinística para as 3 combinações são mostradas na Tabela 15. O resultado mostra que a solução ótima deste exemplo não é sensível à aleatoriedade da resistência. No entanto, a aleatoriedade das cargas conduz a uma probabilidade de falha da solução ótima muito acima do recomendado.

**TABELA 13.** Áreas disponíveis para cada grupo de barras da treliça do exemplo 3.

Grupo	Área ( $\times 10^{-4} m^2$ )		
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
1	0,5807	0,7742	1,0320
2	1,8070	2,1290	2,6450
3	2,3230	2,5160	2,8390
4	3,0970	3,6770	4,0650
5	3,3550	3,8710	4,2580
6	3,8070	4,0650	4,5160
7	7,8710	8,6450	9,0330
8	11,1500	12,0000	12,5800

Fonte: Autoria própria.

**TABELA 14.** Momentos de Inércia para cada grupo de barras da treliça do exemplo 3.

Grupo	Momento de Inércia ( $\times 10^{-7} m^4$ )		
	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>
1	0,377	0,503	0,671
2	1,174	1,384	1,719
3	1,510	1,636	1,845
4	2,013	2,390	2,642
5	2,265	2,516	2,768
6	2,474	2,642	2,936
7	5,116	5,620	5,871
8	7,465	7,800	8,178

Fonte: Autoria própria.

**TABELA 15.** Probabilidades de Falha da solução ótima determinística da treliça do exemplo 3.

Combinação	PF (%)
Aleatoriedade apenas da resistência	0,000
Aleatoriedade apenas das cargas	0,250
Aleatoriedade de cargas e resistência	0,240

Fonte: Autoria própria.

Como no exemplo anterior, foi feita uma otimização probabilística, com aleatoriedade das cargas e das resistências. Impôs-se uma probabilidade de falha alvo de 0,001% e 100.000 pontos amostrais. A análise de confiabilidade foi a última restrição a ser analisada, por demandar maior esforço computacional. Para este problema a solução ótima foi a combinação [1; 3; 2; 2; 2; 1; 3; 2]. Assim, para os grupos de 1 a 8 as áreas escolhidas são, em m<sup>2</sup>, nessa ordem:  $5,807 \times 10^{-5}$ ;  $2,645 \times 10^{-4}$ ;  $2,516 \times 10^{-4}$ ;  $3,677 \times 10^{-4}$ ;  $3,871 \times 10^{-4}$ ;  $3,807 \times 10^{-4}$ ;  $9,033 \times 10^{-4}$  e  $1,200 \times 10^{-3}$ . A probabilidade de falha da solução ótima foi de 0,0008 %.

O algoritmo de *Branch and Bound* realizou no total 3085 avaliações de restrições. Esse número representa 47,0% das 6561 soluções possíveis e é muito alto em relação ao comumente encontrado na literatura. Das soluções analisadas, 1272 se mostraram inviáveis já nas restrições determinísticas, e não passaram pela análise de confiabilidade. Dentre as 1795 soluções classificadas como viáveis em relação às restrições determinísticas, somente 18 foram viáveis também em relação à restrição de confiabilidade. A inclusão da análise de confiabilidade elevou consideravelmente o tempo de execução que totalizou pouco mais de 538 horas.

## 5. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a utilização de uma abordagem determinística para os problemas de otimização estrutural pode conduzir a soluções que não atendam às exigências em relação à confiabilidade da estrutura. Isso ocorre em todos os exemplos apresentados neste trabalho e, também,

em estudos dos autores ainda em andamento, o que indica que é um fato que deve ser considerado em projeto. Essa característica dificulta a transição da otimização como campo de pesquisa para aplicações práticas em projeto. Assim, a principal contribuição deste trabalho é evidenciar que a inclusão de restrições relativas a uma probabilidade de falha alvo é uma necessidade que abre espaço para muitas indagações e pesquisas no assunto.

O algoritmo de *Branch and Bound* mostrou-se de simples implementação e eficiente nas aplicações de otimização determinística. No entanto, seu uso na otimização não determinística em associação ao método de Monte Carlo para análise de confiabilidade aumentou sobremaneira o tempo de execução do algoritmo. Essa característica não recomenda essa associação nos casos correntes de projeto e inviabiliza a aplicação a casos de grandes estruturas. No entanto, pode-se estudar a aplicação de métodos mais eficientes do ponto de vista computacional, como o método FORM, ou mesmo trocar o algoritmo de otimização.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, A.H.; FREITAS, M.R.S. NEVES, F.A. Confiabilidade estrutural usando o método de Monte Carlo e redes neurais. **REM: Revista da Escola de Minas**, v. 58 n. 3, p. 247-244, 2005. DOI 10.1590/S0370-44672005000300011.

CAMP, C.V.; BICHON, B. J. Design of space trusses using ant colony optimization. **Journal of Structural Engineering**, ASCE 130, p. 741-751, 2004. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:5(741).

CERVEIRA, A.; AGRA, A.; BASTOS, F.; GROMICHO, J. A new Branch and Bound method for a discrete truss topology design problem. **Computational Optimization and Applications**, v. 54, n. 1, p. 163-187, 2013. DOI 10.1007/s10589-012-9487-6.

- COLORNI, A.; DORIGO, M.; MANIEZZO, V. Distributed optimization by ant colonies. In: *Proceeding of ECAL91 – European conference on artificial life*. Paris, França, Elsevier Pub, p. 134-142, 1991.
- COELHO, L.S.; TAVARES NETO, R.F. Colônia de Formigas: Uma Abordagem Promissora para Aplicações de Atribuição Quadrática e Projeto de *Layout*. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2004, Florianópolis. *Anais: XXIV ENEGEP – Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. 9 p. Florianópolis, 2004.
- CORELHANO, A.G.B.; CORRÊA, M.R.S.; BECK, A.T. Reliability of buildings in service limit state for maximum horizontal displacements. *IBRACON Structures and Materials Journal*, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 84-103, 2012. ISSN 1983-4195.
- FRANGOPOL, D.M.; ELLINGWOOD, B.R. Life-cycle performance, safety, reliability and risk of structural systems. *Structure Magazine*, Editorial, p.7, March, 2010.
- GERHARDT, E. **Otimização de Problemas de Engenharia pelo Algoritmo Colônia Artificial de Abelhas (ABC)**. 2011. 22 f. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2011.
- GOMES, H.M. **Técnicas de avaliação da confiabilidade em estruturas de concreto armado**. 2001. 252 p. Tese (doutorado em Engenharia). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- KARABOGA, D.; BASTURK, B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization*. Vol. 39, n.3, pp.459-471, 2007a.
- KARABOGA, D.; BASTURK, B. Artificial bee colony (ABC) optimization algorithm for solving constrained optimization problems. *Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing*, v. 4529, pp 789-798, 2007b.
- KARABOGA, D.; BASRUTK, B. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm. *Applied Soft Computing*, v. 8, p. 687–697, 2008.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *IEEE International conference on neural networks*, vol 4, p. 1942-1948, 1995.
- KOIDE, R.M. **Algoritmo de Colônia de Formigas Aplicado à Otimização de Materiais Compostos Laminados**. 2010. 136 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – PPG em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, 2010.
- LEE, K.S.; GEEM, Z.W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm. *Computer & Structures*, v. 82, p. 781-798, 2004.
- LOPEZ, R.H.; BECK, A.T. Reliability-Based Design Optimization Strategies Based on FORM: A Review. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.* v. XXXIV, n. 4, p.506-514, 2012.
- MEDEIROS, G.F.; KRIPKA, M. Algumas aplicações de métodos heurísticos na otimização de estruturas. *Revista CIATEC*. UPF, v. 4, n. 1, p.19-32, 2012.
- PULIDO, J.E., JABOS, T.L., PRATES DE LIMA, E.C. Structural reliability using Monte-Carlo simulation with variance reduction techniques on elastic-plastic structures. *Computers & Structures*, Great Britain, v 43. n. 3, pp. 419-430, 1992.
- REIS, D.C.S. Um Algoritmo *Branch and Bound* para o Problema de Alocação Ótima de Monitores de Qualidade de Energia Elétrica em Redes de Transmissão. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2007.
- ROCHA, M.L.; ASSIS, J.G.O. Proposta de um algoritmo *Branch and Bound* para projeto de redes de custo mínimo sujeita a restrição de conectividade. *Revista Cereus OnLine*. v. 01, n. 01, 2009.
- RONCONI, D.P.; KAWAMURA, M.S. The single machine earliness and tardiness scheduling problem: lower bounds and a branch-and-bound algorithm. *Computational and Applied Mathematics*. SciELO, V. 29, N. 2, pp. 107–124, 2010. ISSN 0101-8205. <http://www.scielo.br/cam>.
- SILVA, J.H.S.; AWRUCH, A.M.; GOMES, H.M. Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado sujeitas aos efeitos de corrosão por cloretos. In: V SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO. *Anais...* São Paulo: USP, 2003. 20 p. CD-ROM.
- SILVA, R.F.; MELO, A.M.C.; PARENTE JR, E. Aplicação de algoritmos genéticos na otimização de placas laminadas tipo sanduíche. Em: **5º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás**, 2009, Fortaleza. 5º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás. Fortaleza: Editora da UFC, 2009. 8p.
- SONMEZ, M. Discrete optimum design of truss structures using artificial bee colony algorithm. *Structural Multidisciplinary Optimization*, v. 43, p. 85–97, 2011.
- SOUZA, M.J.; ALMEIDA, S.R.M. Otimização de treliças planas usando o algoritmo de *Branch and Bound* In: X CONPEEX - Congresso de Pesquisa, Ensino e Extensão da UFG. *Anais...* Goiânia: UFG, 2013. 17p.

STOLPE, M. To bee or not to bee: comments on “Discrete optimum design of truss structures using artificial bee colony algorithm”. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 44, p. 707–711, 2011.

TU, J.; CHOI, K.K., A New Study on Reliability Based Design Optimization”. **ASME Journal of Mechanical Design**, v. 121, n. 4, p. 557-564, 1999.

YANG, R.J.; GU, L. Experience with approximate reliability based optimization methods. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 1-2, p. 152-159, 2004.