

# CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE MICROESTRUTURAS REFORÇADAS

## *Contributions to the Study of Reinforced Microstructures*

Paula Viana Queiroz Andrade<sup>1</sup>, José Julio de Cerqueira Pituba<sup>2</sup>

Recebido em 19 de maio de 2017; aceito em 20 de setembro de 2017; disponível on-line em 06 de março de 2018.



### PALAVRAS CHAVE:

Compósito de Matriz  
Metálica;  
Plasticidade;  
Elemento de Volume  
Representativo;  
Microestrutura;  
Método dos Elementos  
Finitos.

### KEYWORDS:

*Metal Matrix Composite;*  
*Plasticity;*  
*Representative Volume  
Element;*  
*Microstructure;*  
*Finite Element Method.*

**RESUMO:** Este artigo trata da análise da microestrutura de materiais compósitos com matriz metálica (CMM), os quais têm grande aplicabilidade na Engenharia Estrutural. Para isso, são considerados os processos dissipativos de plastificação, que ocorrem na matriz, e de descolamento, que ocorrem na região de interface matriz/inclusão, onde a influência de tais processos na resposta macroscópica do material será investigada. Para as simulações numéricas do comportamento estrutural de CMM, o modelo de von Mises é utilizado na modelagem da matriz e um modelo de fratura coesiva é utilizado na simulação do processo de descolamento na interface. A inclusão é considerada elástica com grande rigidez. Contudo, os processos dissipativos que ocorrem na microestrutura e que repercutem no comportamento macromecânico do material são analisados através de uma modelagem na microescala utilizando um processo de homogeneização baseado no conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR) e no Método dos Elementos Finitos (MEF). A tensão e deformação são médias volumétricas dos respectivos campos microscópicos sobre o EVR. O objetivo geral é verificar as potencialidades e limitações do emprego da modelagem proposta para futuros aperfeiçoamentos de compósitos de matriz metálica para aplicação na engenharia.

**ABSTRACT:** This paper deals with the analysis of the microstructure of metal matrix composites (MMC) and its application in Structural Engineering. For this reason, it is considered the dissipative processes related to plasticity, which occurs in the matrix, and the phase debonding that occurs in the matrix/inclusion interface region, where the influence of such processes on the macroscopic response of the material will be investigated. For the numerical simulations of the MMC structural behavior, the von Mises model will be used in the modeling of the matrix and a cohesive fracture model will be used in the simulation of the phase debonding process. Inclusion will be considered elastic with high rigidity. However, the dissipative processes that occur in the microstructure and that affect the macromechanical behavior of the material will be analyzed through a microscale modeling using a homogenization process based on the concept of Representative Volume Element (RVE) and the Finite Element Method (FEM). The strain and stress are volumetric average of the respective microscopic fields on the EVR. The major goal is to verify the potentialities and limitations of the use of the proposed modeling for future improvements of metal matrix composites to apply in engineering.

### \* Contato com os autores:

<sup>1</sup> e-mail: paulavqandrade@gmail.com (P. V. Q. Andrade)

Engenheira Civil, mestranda, Faculdade de Engenharia Civil, GECON, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil.

<sup>2</sup> e-mail: julio\_pituba@ufg.br (J. J. C. Pituba)

Engenheiro Civil, Prof Associado, Laboratório de Modelagem Computacional, Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Goiás, Brasil.

## 1. INTRODUÇÃO

Desde o começo da humanidade, os materiais marcavam o progresso das civilizações. Assim, com o passar dos anos, os materiais existentes já não eram mais suficientes para a utilização, sendo então criados os materiais compósitos, originados das primeiras sociedades agrícolas. Os primeiros compósitos foram paredes reforçadas com feixes de palha, arcos e carroças feitos com paus e ossos, entre outros. Então estes foram sendo substituídos por materiais mais resistentes. Dentro desse contexto, o material a ser estudado neste trabalho é o compósito de matriz metálica reforçado, compósito esse, largamente utilizado nas indústrias aeronáutica, aeroespacial e automobilística, tendo como exemplos mais específicos: aviões militares, capacetes militares com pesos menores, veículos espaciais, entre outros.

“Atualmente, os mercados de materiais compósitos estão cada vez mais difundidos. Estudos recentes mostram que o maior mercado continua a ser o dos transportes (31%), mas a construção civil (19,7%), marinha (12,4%), equipamento elétrico/eletrônico (9,9%), produtos de consumo (5,8%), aparelhos e equipamentos comerciais são também mercados em grande expansão. O mercado aeroespacial e de aeronaves representa apenas 0,8 % o que é surpreendente tendo em conta a sua importância na origem dos compósitos”. (VENTURA, 2009, p.12).

Portanto, o artigo estuda o comportamento mecânico de compósitos de matriz metálica reforçados por inclusões com alta rigidez quando submetidos às ações de carregamento de natureza mecânica, verificando as potencialidades e limitações do emprego de uma modelagem do comportamento mecânico da sua microestrutura. De modo mais específico, pretende-se estudar a influência da consideração do descolamento da interface matriz/inclusão na resposta macroscópica do compósito. Para tanto,

um modelo constitutivo baseado na Mecânica da Fratura e Contato será utilizado na simulação do descolamento de fase e, por outro lado, o modelo de Plasticidade de von Mises será empregado para a representação do comportamento mecânico da matriz metálica.

## 2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A formulação da modelagem Multiescala segue a proposta de Germain et al. (1983 apud GIUSTI, 2009) e sua estrutura variacional está descrita detalhadamente por Souza Neto e Feijóo (2006), Fernandes et al. (2015a) e Fernandes et al. (2015b).

Utiliza-se um Elemento de Volume Representativo (EVR) para descrever a microestrutura de um material, estando associado a um ponto no problema macroscópico, ou seja, é um ponto na macroestrutura que representa a microestrutura do material, sendo uma forma prática de lidar com as propriedades do material ao nível microscópico, o qual tem influência no seu comportamento global.

A formulação para um problema na microescala é baseada em um princípio variacional, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Já foi visto anteriormente que o EVR representa a microestrutura e a formulação do MEF é a ferramenta utilizada para resolver o problema de equilíbrio. As variáveis do EVR, como as dimensões e constantes elásticas se diferem do material no macrocontínuo e tais características são definidas para um EVR padrão, o qual será utilizado para todos os pontos da estrutura, logo, a solução de um EVR, seu cálculo dos deslocamentos, das forças internas, das tensões verdadeiras e da matriz constitutiva elastoplástica dos seus elementos finitos, é obtido quando se alcança a convergência, de acordo com a tolerância adotada do seu problema de equilíbrio proposto. É preciso definir as condições de contorno a serem impostas no EVR para que se torne possível resolver esse problema, evidenciando que a resposta obtida pode variar em função da condição de contorno adotada.

Assumindo que o EVR está sujeito a um campo de forças de volume  $b = b(y,t)$  e a um campo de forças externas de superfície  $t^e = t^e(y,t)$  atuando no contorno  $\partial\Omega_\mu$ , em analogia com o PTV da mecânica dos sólidos, é dito que o EVR está em equilíbrio se, e somente se, a equação variacional (Equação 1) é satisfeita a cada instante:

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu} b \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[1]}$$

**Em que:**

$v_\mu$ : é o campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis;

$\partial\Omega_\mu$ : é o contorno externo do EVR;

$\Omega_\mu$ : é o domínio do EVR.

Admite-se que existem vazios no EVR, logo:  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^v \cup \Omega_\mu^s$ , onde,  $\Omega_\mu^v$  é o domínio dos vazios e  $\Omega_\mu^s$  é o domínio dos sólidos, logo a Equação 1 se tornará a Equação 2:

$$\int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^s} b \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e \eta dA + \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^v} b \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[2]}$$

O Princípio de macro homogeneidade de Hill-Mandel (GIUSTI, 2009) estabelece que a potência das tensões macroscópicas em qualquer ponto do macrocontínuo deve ser igual à média volumétrica da potência das tensões microscópicas sobre o EVR associado a esse ponto para qualquer movimento cinematicamente admissível do EVR, ou seja (Equação 3):

$$\sigma : \dot{\varepsilon} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu : \dot{\varepsilon}_\mu dV \quad \text{Eq.[03]}$$

O Princípio de macro homogeneidade de Hill-Mandel é válido se, e somente se, os trabalhos virtuais exercidos pelas forças externas de superfície,  $t^e$ , e os trabalhos virtuais exercidos pelas forças de volume  $b$ , são iguais a zero, conforme demonstrado por Giusti (2009).

$$\int_{\partial\Omega_\mu} t^e \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[04]}$$

$$\int_{\Omega_\mu^s} b \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[05]}$$

A partir das equações 4 e 5, a equação de equilíbrio resulta em:

$$\int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu : \nabla^S \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu^v} t^v \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[06]}$$

A tensão microscópica  $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y,t)$  em um ponto  $y$  qualquer do EVR é relacionada com a deformação microscópica  $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu(y,t)$ , através da função constitutiva  $f_y(\varepsilon_\mu(y,t))$  a qual envolve variáveis internas de acordo com o modelo constitutivo. O  $\sigma_\mu$  pode ser definido, como sendo:

$$\sigma_\mu(y,t) = f_y(\nabla^S u_\mu(y,t)) \quad \text{Eq.[07]}$$

Fazendo a substituição da Equação 7 na Equação 6 chega-se na Equação 8:

$$\int_{\Omega_\mu^s} f_y(\nabla^S u_\mu(y,t)) : \nabla^S \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu^v} t^v(y,t) \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[08]}$$

Ao fazer a discretização do domínio do EVR em elementos finitos, no pseudo-tempo, para um determinado incremento  $n$  e discretização  $h$ , é preciso encontrar o vetor de flutuações que  $\tilde{u}_\mu^{n+1} \in v_\mu^h$  satisfaça a Equação 9:

$$\int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_\mu^{n+1}) \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \quad \text{Eq.[09]}$$

Em que,  $B$  é a matriz que relaciona deslocamentos com deformações (para um elemento  $\varepsilon_e = B_e \cdot U_e$  e  $f_y$  é o funcional que calcula as tensões microscópicas.

Para um campo  $h$  qualquer a Equação 9 sempre será satisfeita se:

$$G^{n+1} = \int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_\mu^{n+1}) dV = 0 \quad \text{Eq. [10]}$$

Aplicando o método de Newton-Raphson, que consiste em buscar a correção da flutuação  $\tilde{u}_\mu^k$  para iteração  $k$ , resolve-se a Equação 10, tal que:

$$F^{k-1} + K^{k-1} \tilde{u}_\mu^k = 0 \quad \text{Eq. [11]}$$

Sendo,  $F$  o vetor de forças e  $K$  a matriz de rigidez tangente no EVR.

Denotando  $B_e$  como elemento matriz de deformação-deslocamento e  $N_e$  como número de elementos finitos,  $F$  e  $K$  são definidos como:

$$F^{k-1} = \int_{\Omega_{\mu}^h} B^T f_y(\varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_{\mu}^k) dV \quad \text{Eq. [12]}$$

$$K^{k-1} = \left[ \int_{\Omega_{\mu}^h} B^T D^{k-1} B dV \right] = \sum_{e=1}^{N_e} B_e^T D_e^{k-1} B_e dV_e \quad \text{Eq. [13]}$$

Tem-se ainda que  $D_{\mu}^{k-1}$ , o campo da matriz tangente constitutiva consistente ao longo do domínio do EVR é dado por:

$$D_{\mu}^{k-1} = \left( \frac{df_y}{d\varepsilon_{\mu}} \Big|_{\varepsilon_{\mu} = \varepsilon^{n+1} + B\tilde{u}_{\mu}^{k-1}} \right) \quad \text{Eq. [14]}$$

Após computar as correções  $\tilde{\delta u}_{\mu}^k$  da Equação 11, o campo de flutuação de deslocamentos, considerando a iteração  $k$  relativa ao microcontínuo é dado por:

$$\tilde{u}_{\mu}^k = \tilde{u}_{\mu}^{k-1} + \tilde{\delta u}_{\mu}^k \quad \text{Eq. [15]}$$

Na tensão homogeneizada se admite que o domínio do EVR tem uma parte sólida e uma parte de vazios (matriz e agregados), resultando na seguinte equação:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \sigma_{\mu}(y, t) dV = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}^s} \sigma_{\mu}(y, t) dV + \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}^v} \sigma_{\mu}(y, t) dV \quad \text{Eq. [16]}$$

De acordo com Fernandes et al. (2015a), utilizando o Teorema de Green, a discretização dos elementos no domínio do EVR em elementos finitos, a Equação 16 pode ser escrita sendo:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \sigma_{\mu}(y, t) dV = \frac{1}{V_{\mu}} \left[ \int_{\partial\Omega_{\mu}} t^e(y, t) \otimes_{\varepsilon} y dA - \int_{\Omega_{\mu}^s} b(y, t) \otimes_{\varepsilon} y dV \right] \quad \text{Eq. [17]}$$

Utiliza-se a expressão  $u \otimes_s v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$  no cálculo das integrais, válida para quaisquer vetores  $u$  e  $v$ .

A Equação 17 é calculada de forma aproximada, com a discretização do EVR em elementos finitos, aonde  $t$  representa as forças internas dos nós sobre o contorno e  $y$  representa o vetor das coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  do ponto  $y$  do EVR. Sendo assim, para um determinado elemento  $e$ , o vetor das forças internas é dado por meio da Equação 18:

$$(F_{\text{int}})_e = B_e^T \sigma_e V_e \quad \text{Eq. [18]}$$

Em que,  $\sigma$  são as tensões e  $V_e$  é o volume do elemento.

Para se obter o vetor de forças internas total do EVR, somam-se as contribuições de todos os elementos.

Diferentes condições de fronteira podem ser aplicadas ao EVR para definir as diversas classes de modelos multiescala, essas diferentes condições, levam a diferentes níveis de liberdade, com isso, os resultados obtidos possuem diferenças significativas, sendo preciso escolher os resultados de acordo com o tipo de problema, do material, da natureza e da distribuição dos constituintes no EVR. (LOPES, 2013)

Existem três classes de modelos multiescala para as condições de contorno do EVR mais usuais, que se diferenciam pela imposição de um espaço de variações admissíveis, que são o modelo de Taylor, o modelo de deslocamento linear no contorno do EVR e o modelo de flutuações de deslocamentos periódicas no contorno do EVR.

O modelo de Taylor é o mais restritivo e com a aplicação mais simples, apresentando a solução mais rígida do problema microscópico. Já o modelo de flutuações periódicas é o mais utilizado pela comunidade científica, pois apresenta uma melhor convergência das propriedades médias utilizando EVR de menores dimensões, além de apresentar uma solução menos rígida dentro os três modelos citados no parágrafo anterior. No presente trabalho são comparadas as respostas obtidas com o emprego do modelo de deslocamento linear no contorno do

EVR e o modelo de flutuações periódicas de deslocamentos no contorno do EVR. Contudo, por apresentar respostas mais flexíveis evidenciando os processos dissipativos ocorridos na microestrutura, o modelo de flutuações periódicas será mais utilizado. Por fim, maiores detalhes sobre as classes de modelos multi-escala encontram-se em Giusti (2009) e Fernandes et al. (2015a).

O modelo de flutuações de deslocamentos periódicas no contorno do EVR é apropriado para representar o comportamento de materiais com microestrutura periódica. Pode-se mostrar que qualquer comportamento do material apresenta uma resposta periódica se malhas refinadas são consideradas, no sentido de que mais pontos de integração significam mais EVRs.

Cada lado  $\Gamma_i^+$ , o qual a direção normal ao contorno é  $n_i^+$ , corresponde a um lado igual e oposto  $\Gamma_i^-$ , com direção normal ao contorno  $n_i^-$ , sendo  $n_i^+ = n_i^-$ . Dessa mesma forma, para cada ponto  $y^+$  pertencente ao contorno  $\Gamma_i^+$  existe um ponto correspondente  $y^-$  pertencente ao contorno  $\Gamma_i^-$ . Nesse modelo tem que a flutuação do deslocamento deve ser periódica no contorno do EVR, sendo assim, cada par de pontos  $y^+$  e  $y^-$  são iguais, ou seja:

$$\tilde{u}_\mu(y^+, t) = \tilde{u}_\mu(y^-, t) \quad \forall \text{ par de pontos } \{y^+, y^-\} \in \partial\Omega_\mu \quad \text{Eq. [19]}$$

As forças do corpo  $b(y,t)$  devem ser nulas sobre o domínio  $\Omega_\mu$  do EVR. Neste caso, para obter o vetor de forças internas nodais, o vetor dos deslocamentos no EVR e a matriz constitutiva tangente em cada elemento, é preciso resolver primeiro o problema de equilíbrio no EVR. A equação será decomposta em parcelas, onde o sub-índice  $i$  é relativo aos nós internos,  $p$  e  $m$  referem-se aos pares de pontos  $y^+$  e  $y^-$  definidos no contorno, não coincidindo com o canto, chegando em:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{Bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{Bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_m \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad \text{Eq. [20]}$$

Sendo,  $F_p$ ,  $F_m$  e  $F_i$  forças internas, calculadas através da Equação 18 nos pontos  $p$ ,  $m$  e  $i$ , respectivamente. Desta forma, para evitar deslocamentos de corpo rígido, nos cantos são prescritas flutuações nulas, não sendo definidos na Equação 20 termos relativos aos cantos.

Considerando que  $\delta \tilde{u}_m = \delta \tilde{u}_p$ , a Equação 20 se resulta em:

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{Bmatrix} K_{pp} & K_{pm} & K_{pi} \\ K_{mp} & K_{mm} & K_{mi} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} \end{Bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad \text{Eq. [21]}$$

Após as manipulações algébricas a equação acima pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} + \begin{Bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{Bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{u}_p \\ \delta \tilde{u}_i \end{Bmatrix}_\mu^k = 0 \quad \text{Eq. [22]}$$

As flutuações nos pontos  $p$  e nos nós internos são as incógnitas do problema.

O vetor  $\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1}$  pode ser obtido a partir do vetor de forças internas chegando à seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} F_p + F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{k-1} = \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{mp} & K_{pm} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} & K_{pc} + K_{mc} \\ K_{ip} & K_{im} & K_{ii} & K_{ic} \end{bmatrix}^{k-1} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_m \\ u_i \\ u_c \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [23]}$$

De acordo com Fernandes et al. (2015a), a tensão homogeneizada relativa ao macrocontínuo em um incremento  $n+1$  é dada pela Equação 24:

$$\sigma = \sigma_n + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} : \Delta \varepsilon_{n+1} \quad \text{Eq. [24]}$$

Sendo,  $D_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$  o operador constitutivo tangente homogeneizado.

A tensão homogeneizada no incremento n+1 é:

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \partial f_y(\varepsilon_{\mu(n+1)}) dV = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} f_y(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)}) dV \quad \text{Eq. [25]}$$

Desse modo, o operador tangente homogeneizado equivale à Equação 26:

$$D_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \frac{\partial f_y(\varepsilon_{n+1} + \nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)})}{\partial \varepsilon_{\mu(n+1)}} dV \quad \text{Eq. [26]}$$

Como no modelo de Taylor o campo de flutuações é nulo no EVR,  $\nabla^S \tilde{u}_{\mu(n+1)} = 0$ , fazendo com que a Equação 26 se torne:

$$D_{n+1}^{Taylor} = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \left. \frac{\partial f_y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{\mu}} \right|_{n+1} dV = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \left. \frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial \varepsilon_{\mu}} \right|_{n+1} dV = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} D_{\mu(n+1)} dV \quad \text{Eq. [27]}$$

Sendo,  $D_m$  – operador tangente consistente com a lei constitutiva incremental microscópica e  $D_{Taylor}$  a média volumétrica do tensor constitutivo incremental.

Considerando-se a Equação 23 para um caso geral, é possível representar o operador tangente sendo:

$$D_{n+1} = D_{n+1}^{Taylor} + \tilde{D}_{n+1} \quad \text{Eq. [28]}$$

Onde o  $\tilde{D}_{n+1}$  é:

$$\tilde{D}_{n+1} = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \left. \frac{\partial f_y(\nabla^S \tilde{u}_{\mu})}{\partial \varepsilon_{\mu}} \right|_{n+1} dV \quad \text{Eq. [29]}$$

Para o cálculo de  $\tilde{D}_{n+1}$ , considerando que no EVR sejam definidas  $N_f$  fases, podendo cada fase ter propriedades elásticas diferentes, a equação 27 será calculada da seguinte forma:

$$D_{n+1}^{Taylor} = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{V_i}{V_{Total}} D_{\mu(n+1)}^i \quad \text{Eq. [30]}$$

A fim de calcular o  $\tilde{D}_{n+1}$ , considere a seguinte forma simplificada:

$$(\tilde{\sigma}_R)_{n+1} = -(K_R)_n^{-1} (F_R)_n \quad \text{Eq. [31]}$$

Tendo então:

$$(F_R)^{iEVR} = (F_i)^{iEVR} \quad \text{Eq. [32]}$$

$$(\tilde{\sigma}_R)_n^{iEVR+1} = (\tilde{\sigma}_i)_n^{iEVR+1} \quad \text{Eq. [33]}$$

$$K_R = (K_{ii})^{k-1} \quad \text{Eq. [34]}$$

Considerando as equações acima e que

$D_{\mu(n+1)} = \left. \frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial \varepsilon_{\mu}} \right|_{n+1}$ , a Equação 29 pode ser escrita como:

$$\tilde{D}_{n+1} = -\frac{1}{V_{\mu}} [G_R] [K_R]^{-1} [G_R]^T \quad \text{Eq. [35]}$$

Onde a matriz  $G^R$  é obtida a partir da matriz G total, calculada da seguinte maneira:

$$G = \sum_{e=1}^{N_e} [D_{\mu}]_e B_e V_e \quad \text{Eq. [36]}$$

Onde,  $N_e$  é o número de elementos utilizados na discretização e  $B_e$  é a matriz que relaciona deslocamento com deformação do elemento. Essa mesma definição é utilizada para o Modelo de Flutuações Periódicas.

Para o cálculo de  $\tilde{D}_{n+1}$ , o operador tangente é dado pela Equação 28, sendo a parcela de Taylor dada pela Equação 30 e considerando-se a Equação 33,  $\tilde{D}_{n+1}$  resulta em:

$$\tilde{D}_{n+1} = -\frac{1}{V_{\mu}} [G_i] [K_{ii}]^{-1} [G_i]^T \quad \text{Eq. [37]}$$

Sendo  $G_i$  a parcela da matriz G referente aos pontos internos.

Assim como no Modelo de Deslocamento Linear no Contorno do EVR, para calcular o  $\tilde{D}_{n+1}$ , é considerado a seguinte forma simplificada para a Equação 22, tendo então:

$$(F_R)^{iEVR} = \begin{Bmatrix} F_p & F_m \\ F_i \end{Bmatrix}^{iEVR} \quad \text{Eq. [38]}$$

$$(\tilde{\sigma}_R)_n^{iEVR+1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_p \\ \tilde{\sigma}_i \end{Bmatrix}_n^{iEVR+1} \quad \text{Eq. [39]}$$

$$K_R = \begin{bmatrix} K_{pp} + K_{pm} + K_{mp} + K_{mm} & K_{pi} + K_{mi} \\ K_{ip} + K_{im} & K_{ii} \end{bmatrix}^{k-1} \quad \text{Eq. [40]}$$

Para o cálculo de  $\tilde{D}_{n+1}$ , o operador tangente é dado pela Equação 28, sendo a parcela de Taylor dada pela Equação 30 e na Equação 37,  $K_R$  é dado pela Equação 40 e  $G_R$  é definida como:

$$G_R = [G_p + G_m \quad G_i] \quad \text{Eq. [41]}$$

Logo a Equação 35 torna-se:

$$\tilde{D}_{n+1} = -\frac{1}{V_\mu} [G_p + G_m \quad G_i] [K_R]^{-1} [G_p + G_m \quad G_i]^T \quad \text{Eq. [42]}$$

Para a formulação do Modelo de Fratura Coesiva e de Contato, em 1999, Ortiz e Pandolfi propuseram um modelo constitutivo para fratura coesiva, o qual descreve a lei coesiva de deformação finita irreversível. Neste modelo analisa-se a propagação da fissura tridimensionalmente.

De acordo com o modelo de Ortiz e Pandolfi (1999), a energia coesiva liberada  $\phi$  durante o processo de propagação da fratura é dada pela Equação 43:

$$\phi = \phi(\delta_n, \delta_s, \mathbf{q}) \quad \text{Eq. [43]}$$

Em que,  $\delta_n$  é a abertura devido ao modo I,  $\delta_s$  é a abertura devido ao modo II e  $\mathbf{q}$  é a variável interna que descreve os processos inelásticos durante a nucleação e propagação da fratura no material.

Segundo os Princípios da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis (GERMAIN et al., 1983), do potencial de energia livre  $\phi$  é obtida a lei coesiva ou relação constitutiva do material fraturado (vide Equação 50).

Podemos escrever que:

$$\delta_s = |\delta_s| \quad \text{Eq. [44]}$$

Dando assim um caráter isotrópico para o seu comportamento naquela superfície, e para a formulação da lei coesiva dos modos mistos, introduz-se um deslocamento de abertura efetiva:

$$\delta = \sqrt{\beta^2 \delta_s^2 + \delta_n^2} \quad \text{Eq. [45]}$$

Sendo  $\delta$  é o deslocamento de abertura efetiva,  $\beta$  assume valores diferentes para as aberturas de escorregamento e normal, variando

de 0 a 1, sendo um parâmetro que quantifica a razão entre os processos de abertura da fratura devido ao escorregamento e à separação normal. Como um modelo simples de coesão é obtido assumindo que a energia potencial livre  $\phi$  depende apenas do deslocamento de abertura efetiva  $\delta$ , isto é:

$$\phi = \phi(\delta, \mathbf{q}) \quad \text{Eq. [46]}$$

A partir disso, segue a lei coesiva, dada pela Equação 47:

$$\mathbf{t} = \frac{t}{\delta} (\beta^2 \delta_s + \delta_n \mathbf{n}) \quad \text{Eq. [47]}$$

Em que,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a fissura,  $\delta_s$  é o vetor de abertura do escorregamento localizado na superfície da fissura,  $\delta_n$  é o vetor de abertura da normal localizado na superfície da fissura e  $t$  é a tensão coesiva escalar, o valor de  $t$  é dado pela Equação 48:

$$t = \sqrt{\beta^{-2} |\mathbf{t}_s|^2 + t_n^2} \quad \text{Eq. [48]}$$

Essa relação mostra que  $\beta$  define que a razão entre os processos relativos ao cisalhamento e as tensões normais críticas, sendo então um fator de peso para se levar em conta o fenômeno de escorregamento entre as bordas da fissura. Percebe-se que, próximo ao fechamento, à superfície coesiva é sujeita à condição de restrição de contato, incluindo o atrito, considerando ambos como fenômenos independentes a serem modelados fora da lei coesiva (ORTIZ; PANDOLFI, 1999).

Pituba et al. (2016) propõem, para simular o comportamento mecânico de materiais, com o intuito de minimizar problemas de instabilidade da resposta numérica desse tipo de formulação, a energia coesiva liberada na microestrutura do material (Equação 43) é dada pela expressão:

$$\phi = e \sigma_c \delta_c \left[ 1 - e^{-\left(1 + \frac{\delta}{\delta_c}\right)} \right] \quad \text{Eq. [49]}$$

Onde a lei de tensão efetiva coesiva para o caso de carregamento é obtida da 47, como sendo:

$$t = \frac{\partial \phi}{\partial \delta} = \sigma_c e^{-\delta / \delta_c}, \text{ se } \delta = \delta_{\text{máx}} \text{ e } \dot{\delta} > 0 \quad \text{Eq. [50]}$$

Em complementação a relação proposta para a tensão efetiva escalar no caso de descarregamento é proposta admitindo-se um caso elástico, ou seja, sem deslocamento de abertura efetiva residual, sendo descrita a seguir:

$$t = \frac{t_{\text{máx}}}{\delta_{\text{máx}}} \delta, \text{ se } \delta < \delta_{\text{máx}} \text{ e } \dot{\delta} \leq 0 \quad \text{Eq. [51]}$$

Sendo  $e$  é a base neperiana ( $e = 2,71828$ ),  $\sigma_c$  é um parâmetro do modelo que reflete a máxima tensão de tração normal coesiva,  $\dot{\delta}$  é a velocidade de abertura,  $\delta_{\text{máx}}$  é a máxima abertura efetiva até o instante da análise,  $t_{\text{máx}}$  é a máxima tensão efetiva até o instante da análise e  $\delta_c$  é a abertura crítica.

Enquanto a tensão efetiva for menor que a tensão de tração normal coesiva,  $\sigma_c$ , não existe fratura na região verificada, mas quando essa tensão efetiva assumir valores maiores que a tensão de tração normal coesiva, a fratura é criada, considerada como um processo de separação gradual com a finalidade de evitar uma forte e brusca descontinuidade no material.

Segundo Ortiz e Pandolfi (1999), há uma relação entre a taxa liberada de energia crítica ( $G_c$ ) para a propagação de fratura, em nosso caso, na microestrutura do material, e a lei coesiva. Adotando-se a direção 1 como sendo aquele no plano da fratura e na direção de propagação da mesma, pode-se admitir que  $G_c$  é dado por:

$$G_c = \int_0^R t \cdot \delta_{,1} dx_1 \quad \text{Eq. [52]}$$

Onde  $R$  é o comprimento da zona coesiva. Para o caso da Equação 50, temos que a taxa liberada de energia crítica é expressa como:

$$G_c = e \sigma_c \delta_c \quad \text{Eq. [53]}$$

Obviamente que a energia de fratura das modelagens convencionais, aquelas realizadas

com modelos constitutivos fenomenológicos, trata da fratura no macrocontínuo como um meio homogeneizado. No presente trabalho, o conceito de energia de fratura está intimamente ligado ao que ocorre na zona de transição na mesoescala do material, que ao se propagar e unir com outras microfissuras podem vir a gerar um processo de localização, o que leva à formação de uma fratura no macrocontínuo. Esse processo leva a uma relação entre as energias de fratura no macrocontínuo (material homogeneizado) e na mesoescala do material, como abordado em OLIVER et al. (2014).

Antes do aparecimento das fraturas, uma rigidez entre as bordas da possível fratura presente entre os elementos finitos triangulares é chamada de fator de penalidade ( $\lambda_p$ ). Este fator de penalidade é um parâmetro de valor escalar. Na prática, valores altos para o fator de penalidade são adotados a fim de obter uma aproximação precisa. Tal procedimento garante que a possível fratura permaneça fechada até se atingir o critério de separação e, ao mesmo tempo, garante a admissibilidade física de todo o processo. O fator de penalidade é, portanto, uma rigidez imposta ao fechamento da fissura.

Por outro lado, segundo Cirak et al., 2005, é criada uma rigidez nos nós pares com o processo de contato de elementos finitos coesivos, para não permitir a penetração das superfícies de fissura, porém, nos regimes predominantes de tração, este fator de penalidade substitui efetivamente a porção rígida inicial da lei coesiva por uma resposta linear rígida, conforme se vê na equação 54. Para detectar o fenômeno de contato coesivo, é adotado o conceito das diferenças entre os pontos de Gauss do elemento finito de contato e fratura coesiva.

$$t = \lambda_p \delta, \text{ se } \lambda_p \delta \leq \sigma_c \quad \text{Eq. [54]}$$

Adota-se a fratura como aparecendo e propagando apenas na fronteira do elemento finito de contato e fratura coesiva.

Neste artigo será utilizada a técnica em que o elemento finito de contato e fratura coesiva é inserido entre os elementos finitos triangulares,



o qual fornece respostas precisas, evitando assim a necessidade de uma adaptação da malha na inserção do elemento coesivo. Pituba e Souza Neto (2015) apresentaram uma formulação na qual o elemento finito de contato e fratura é definido como um elemento de quatro nós, e a sua geometria é compatível com a de dois elementos triangulares usados para modelar as fases da matriz e a inclusão, e no presente trabalho será adotado a mesma formulação, que pode ser vista mais detalhadamente em PITUBA et al. (2016).

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

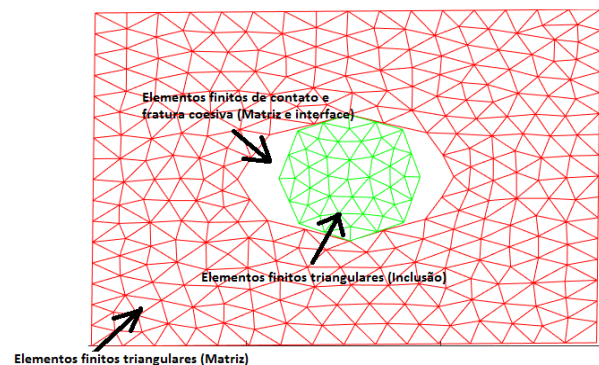
A partir do trabalho de Azizi (2012), foram definidos os valores iniciais dos parâmetros referentes às propriedades dos materiais, adotando-se para a matriz um coeficiente de Poisson  $\nu_m = 0,3$  e um módulo de elasticidade, atribuído de acordo com o tipo de material e nesse caso foi definido sendo igual a  $E_m = 69.000$  MPa. Para as inclusões, foi utilizado um coeficiente de Poisson  $\nu_i = 0,17$  e a relação para o módulo de elasticidade foi de  $E_i = 5,7 \times E_m$ , resultando em  $E_i = 393.300$  MPa. A tensão de plastificação adotada foi de 200 MPa e o módulo de encruamento adotado foi de 500 MPa. O modelo utilizado foi o de von Mises com encruamento isotrópico, e foi considerado estado plano de tensão (EPT).

Baseando no trabalho de Cirak et al. (2005), Fernandes et al. (2015a) e Santos et al. (2016), foram considerados os parâmetros,

correspondentes às características dos elementos de fratura,  $\sigma_c = 0,1$  MPa,  $\beta = 0,707$ ,  $\lambda_p = 3000000$  e  $\delta_c = 0,02$  mm. Foram utilizados 580 elementos finitos triangulares e 16 elementos finitos de contato e fratura coesiva e 339 nós na malha que corresponde à modelagem.

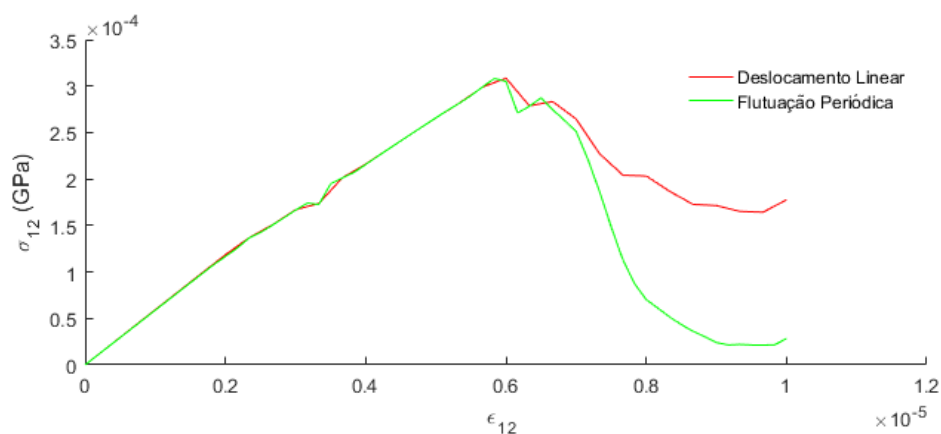
Inicialmente, foram adotados dois modelos para verificar a resposta do EVR, o modelo de Deslocamento Linear e o modelo de Flutuação Periódica, o modelo de Taylor, por ser o mais restrito, não foi adotado. Nas direções x e y, foram consideradas as deformações macroscópicas genéricas aplicadas  $\varepsilon_x = 0,004$ ,  $\varepsilon_y = -0,0007$  e foi aplicada uma deformação distorcional,  $\gamma_{xy} = 0,00002$ .

Para verificar então a sensibilidade do modelo em termos de parâmetros, foi feita uma comparação entre os dois modelos, para ver qual a influência deles para a tensão homogeneizada e a deformação macroscópica imposta no EVR, e seus resultados são apresentados nas Figuras 2 e 3.



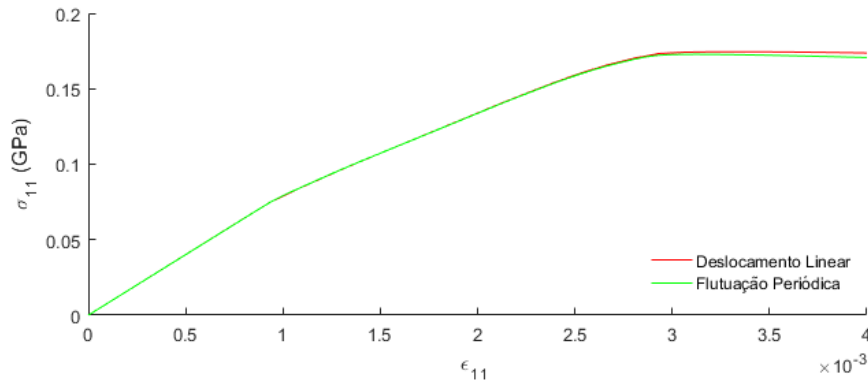
**FIGURA 1:** Modelo utilizado para a análise do comportamento de microestruturas de CMMs.

**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 2:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\varepsilon_{12}$ ).

**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 3:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\epsilon_{11}$ ).

**FONTE:** Autor (2017).

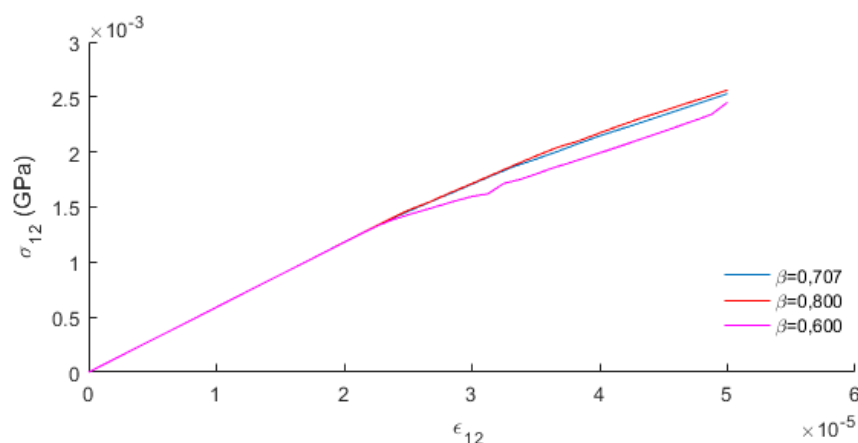
A partir dos gráficos é verificado que apesar dos resultados serem bem próximos, o modelo de Flutuação Periódica representa mais a dissipação de energia, demonstrando principalmente quando a fase de descolamento da interface matriz/agregado se inicia, obtendo respostas mais flexíveis e mais próximas da realidade quando comparado com o modelo de Deslocamento Linear que se trata de uma classe de modelo multi-escala com resposta mais rígida devido a sua condição de contorno no EVR. Esse comportamento qualitativo apresentado na Figura 3 é o esperado e está de acordo com Souza Neto e Feijó (2006). Percebe-se isso principalmente no gráfico que representa o cisalhamento (Figura 2), já o resultado do gráfico na direção normal é bem parecido para ambos os modelos (Figura 3). Sendo assim, para as próximas análises foi utilizado o modelo de Flutuação Periódica.

Uma segunda análise foi em relação à

importância do parâmetro  $\beta$ , o qual relaciona a abertura normal com a abertura por cisalhamento, e suas variações, de acordo com o tipo de carregamento adotado. Os outros parâmetros utilizados são os mesmos adotados para o primeiro exemplo.

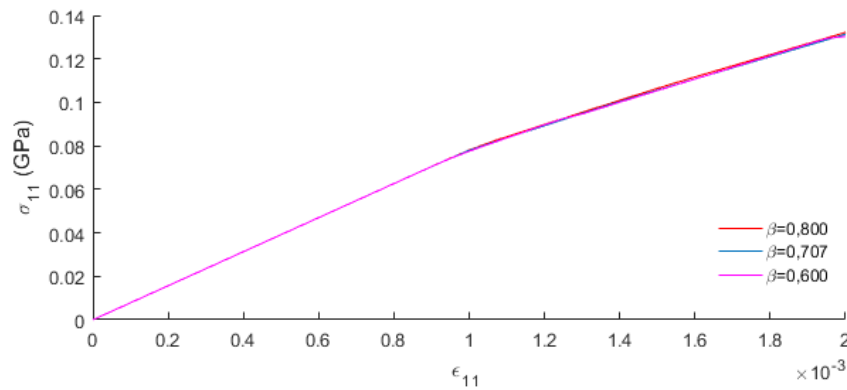
Foram simulados três tipos de carregamentos, tensão de tração alta na direção  $x$ , tensão de compressão e tensão de cisalhamento puro e três parâmetros  $\beta$  foram comparados, o utilizado inicialmente,  $\beta = 0,707$ , um valor maior e um menor,  $\beta = 0,800$  e  $\beta = 0,600$ , respectivamente.

Para o primeiro caso, tensão de tração alta na direção  $x$ , foram utilizadas nas direções  $x$  e  $y$ , as deformações macroscópicas,  $\epsilon_x = 0,002$ ,  $\epsilon_y = -0,0005$  e uma deformação distorcional,  $\gamma_{xy} = 0,0001$ . As comparações são vistas nas Figuras 4 e 5.



**FIGURA 4:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\epsilon_{12}$ ).

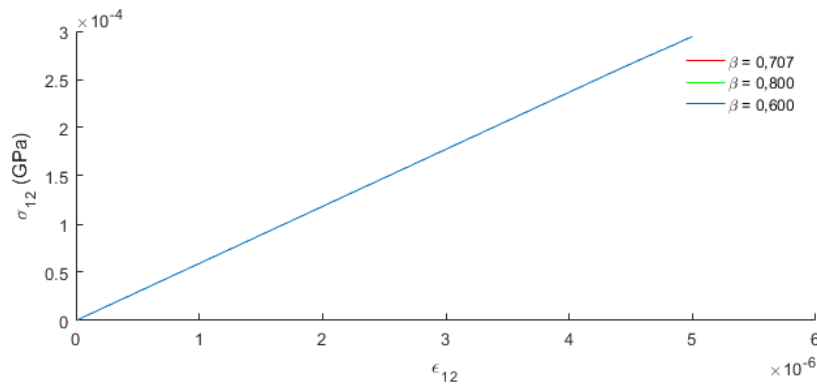
**FONTE:** Autor (2017).



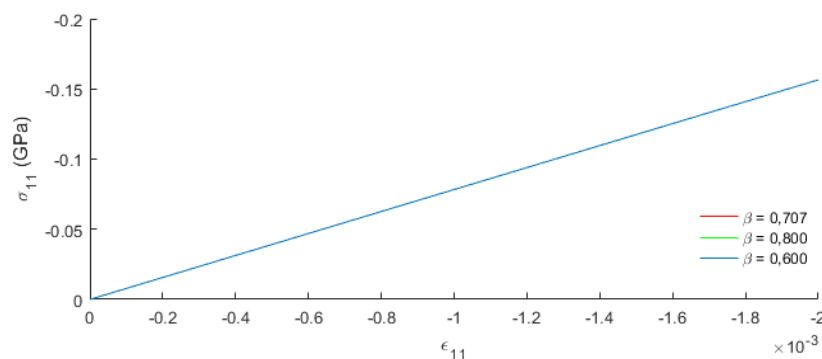
**FIGURA 5:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\epsilon_{11}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).

A partir dos gráficos representados acima, é possível perceber que a influência do parâmetro  $\beta$  para os gráficos de tensão normal é muito pequena, como se espera para um material dúctil. Já para o gráfico de tensão homogeneizada de cisalhamento a diferença se torna um pouco mais evidente, pois está relacionada ao escorregamento entre as faces da fratura. Quanto menor o  $\beta$ , maior a perda de resistência e rigidez do material e um maior processo de fratura em relação ao cisalhamento.

Para o segundo caso, tensão de compressão alta, foram utilizadas as deformações macroscópicas de:  $\epsilon_x = -0,002$ ,  $\epsilon_y = 0,0005$  e a mesma deformação distorcional,  $\gamma_{xy} = 0,0001$ . A seguir pode ser visto, por meio das Figuras 6 e 7, que o parâmetro  $\beta$  não influencia nos resultados para o caso de tensão de compressão, para todos os casos os resultados são idênticos, independentemente do valor adotado para  $\beta$ .



**FIGURA 6:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\epsilon_{12}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 7:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\epsilon_{11}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).

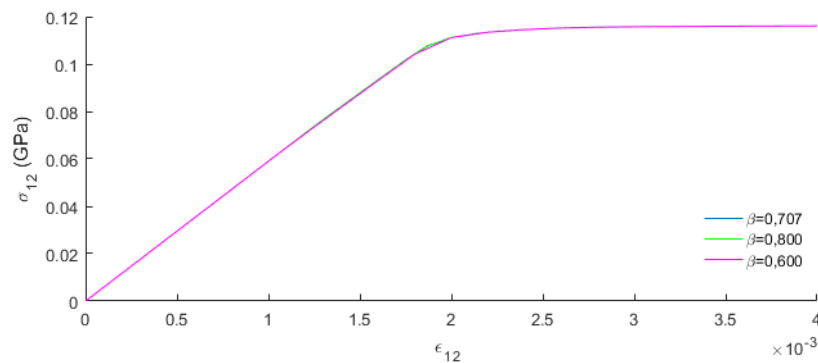
Para o terceiro caso, cisalhamento puro, foram utilizadas as deformações macroscópicas de:  $\varepsilon_x = 0,0000001$ ,  $\varepsilon_y = 0,0000001$  e a deformação distorcional,  $\gamma_{xy} = 0,008$ . Nas Figuras 8 e 9, segue os resultados da influência do parâmetro  $\beta$  para esse novo caso.

É possível concluir de forma análoga ao exemplo de tensão de tração, que neste caso a influência do  $\beta$  para o gráfico de tensão homogeneizada de cisalhamento é praticamente nula, enquanto para os gráficos de tensão normal a diferença se torna mais evidente, pelo parâmetro se relacionar ao escorregamento entre as faces da fratura.

A terceira análise teve a intenção de se evidenciar a importância de considerar o descolamento em regime de colapso no

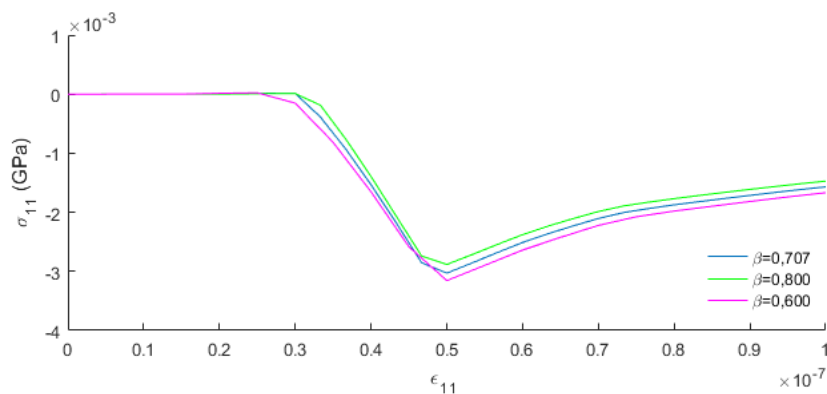
Compósito de Matriz Metálica e para isso foi comparado um modelo de uma inclusão aderida, ou seja, com a interface perfeitamente aderida, sem fratura, e uma inclusão descolada, com fratura. Novamente foram ressaltados os três casos, o primeiro sendo de tensão de tração, o segundo de tensão de compressão e o último de cisalhamento puro.

Para essas comparações, foram utilizados novamente os parâmetros do primeiro exemplo e as deformações macroscópicas utilizadas no exemplo anterior, as quais são, para o caso de tensão de tração alta na direção x, iguais a:  $\varepsilon_x = 0,002$ ,  $\varepsilon_y = -0,0005$  e  $\gamma_{xy} = 0,0001$ . As Figuras 10 e 11 representam as comparações entre as tensões e deformações.



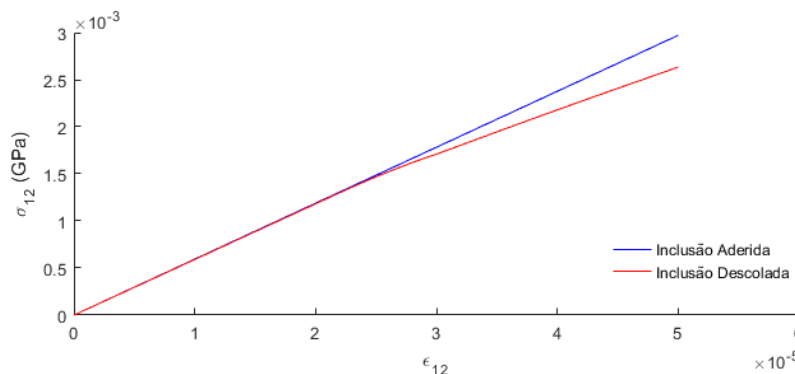
**FIGURA 8:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\varepsilon_{12}$ ).

**FONTE:** Autor (2017).

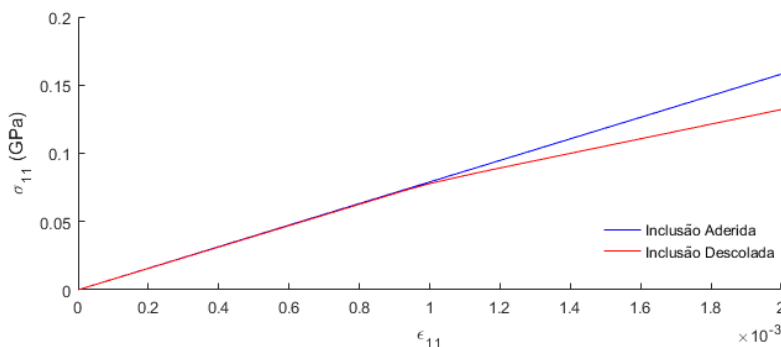


**FIGURA 9:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\varepsilon_{11}$ ).

**FONTE:** Autor (2017).

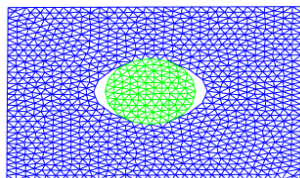


**FIGURA 10:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\epsilon_{12}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 11:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\epsilon_{11}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).

A Figura 12 representa a malha da inclusão descolada.



**FIGURA 12:** EVR em Processo de Descolamento.  
**FONTE:** Autor (2017).

No gráfico da Figura 10, de tensão homogeneizada de cisalhamento e tensão normal, já se percebe a importância de considerar o deslocamento na inclusão, em regime de colapso do CMM, havendo uma diferença considerável nos resultados, ou seja, existe uma diminuição na rigidez do EVR ao considerar a fratura.

Na Figura 11, observa-se a fratura ocorrendo realmente na inclusão descolada, havendo uma descontinuidade e uma perda acentuada de resistência. Já para a inclusão aderida existe uma continuidade e linearidade no

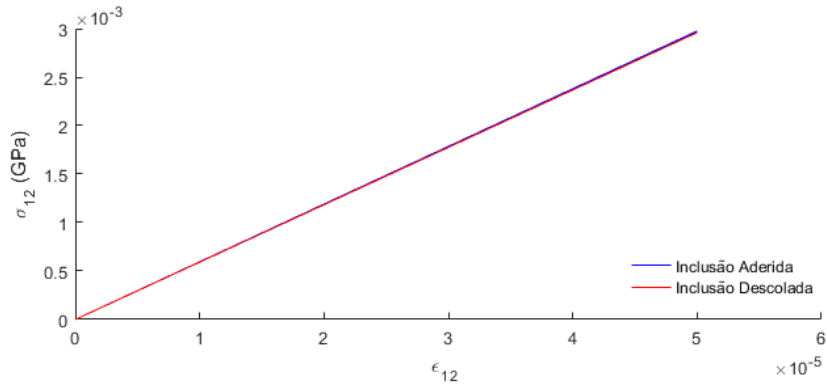
gráfico. Novamente se percebe uma maior rigidez para o caso da inclusão aderida, por não haver fratura.

Para o caso de tensão predominante de compressão, as deformações são:  $\epsilon_x = -0,002$ ,  $\epsilon_y = 0,0005$  e  $\gamma_{xy} = 0,0001$ , e os resultados são comparados nas Figuras 13 e 14.

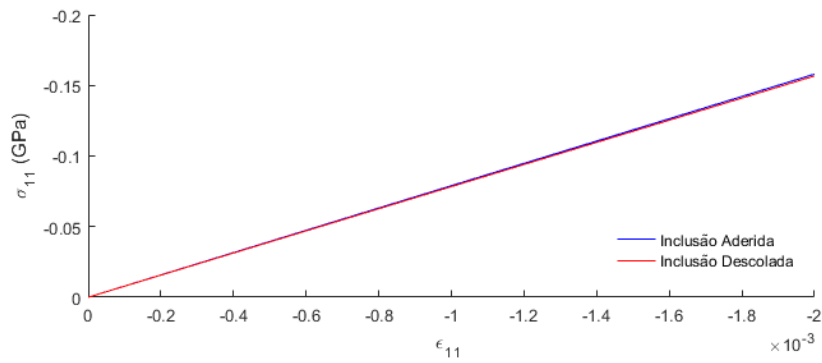
Para o caso de tensão de compressão, os resultados são bem próximos para ambas as inclusões, aderida e descolada, tanto para a tensão homogeneizada cisalhante como para as tensões normais.

Já para o último caso, de cisalhamento, as deformações utilizadas são:  $\epsilon_x = 0,0000001$ ,  $\epsilon_y = 0,0000001$  e  $\gamma_{xy} = 0,008$ . Nas Figuras 15 e 16 abaixo são vistas as comparações.

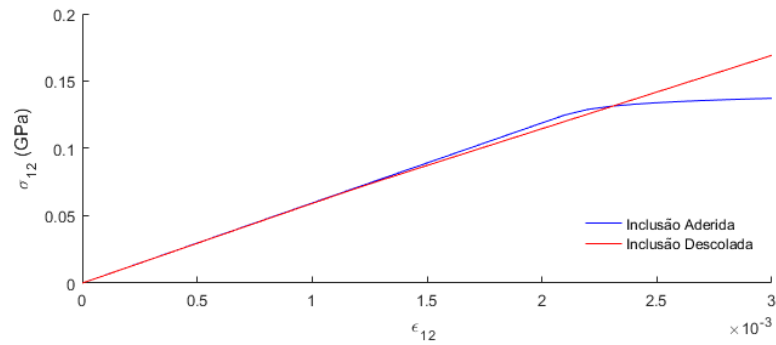
Para esse caso, na Figura 16 percebe-se que a tensão é considerada nula, em comparação a Figura 15, como esperado, pois está sendo aplicada apenas distorção.



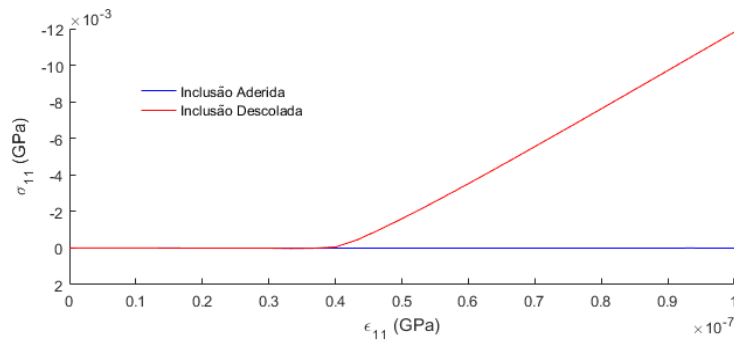
**FIGURA 13:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\epsilon_{12}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 14:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\epsilon_{11}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).



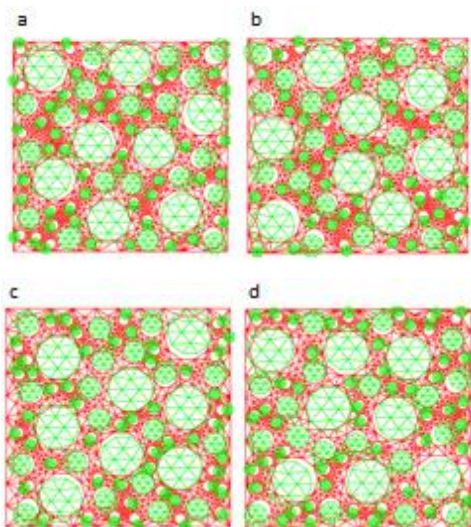
**FIGURA 15:** Tensão de cisalhamento ( $\sigma_{12}$ ) x Deformação distorcional ( $\epsilon_{12}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 16:** Tensão normal ( $\sigma_{11}$ ) x Deformação normal ( $\epsilon_{11}$ ).  
**FONTE:** Autor (2017).

Uma outra análise é sobre a influência da inclusões nos resultados. O gráfico da Figura 18

distribuição de inclusões deslocadas, onde são apresentadas quatro diferentes distribuições de inclusões deslocadas em um EVR de tamanho 100 mm x 100 mm e de espessura igual a 0,2 mm e com o número de elementos finitos de fratura igual a 780. Em todos os modelos, a fração de volume dos agregados é a mesma, de 50% e as inclusões são distribuídas de forma aleatória. Então compara-se o efeito dessa distribuição das inclusões. A Figura 17 apresenta tais distribuições das inclusões para os quatro modelos.



**FIGURA 17:** EVRs para análise da influência da distribuição das inclusões: [a] Modelo 1; [b] Modelo 2; [c] Modelo 3; [d] Modelo 4. **FONTE:** Autor (2017).

Para o modelo 1 foi utilizado um EVR de 2380 nós e 3158 elementos. Para o modelo 2 foi utilizado 2340 nós e 3078 elementos, para o modelo 3, 2295 nós e 2988 elementos e por fim, para o modelo 4, utilizou-se 2293 nós e 2984 elementos.

A partir deles, foram geradas análises considerando a interface matriz/inclusão modelada por elementos de fratura e contato, submetendo os EVRs a uma deformação macroscópica idêntica para todos os modelos, obtendo-se valores de tensão homogeneizada na direção x para o EVR.

Após feito isso, juntou-se em um só gráfico os resultados, gerando a comparação entre eles para verificar a influência da distribuição das

relaciona as tensões homogeneizadas na direção x com as deformações macroscópicas.

Por meio do gráfico da Figura 18 é possível perceber que os quatro modelos apresentam curvas praticamente idênticas de tensão-deformação, independentemente do tipo de distribuição adotado, confirmando então que a tal distribuição não influencia na resposta macromecânica homogeneizada do EVR.

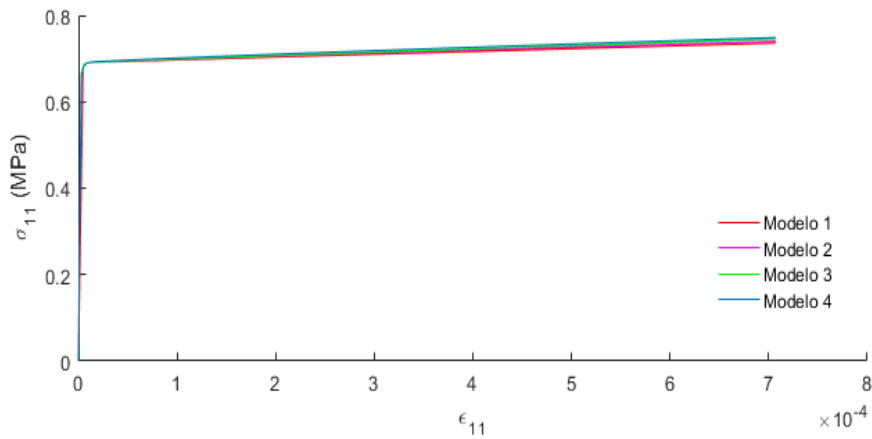
Por fim, a última análise irá avaliar a influência da quantidade de inclusões e suas distribuições sobre o comportamento do material em regime predominante de tração. Essa análise foi feita para 2 grupos de 6 EVRs diferentes em cada um.

Os grupos se diferem pela distribuição aleatória das inclusões. Eles possuem um aumento gradativo da fração volumétrica das inclusões, iniciando com 10% até 60%.

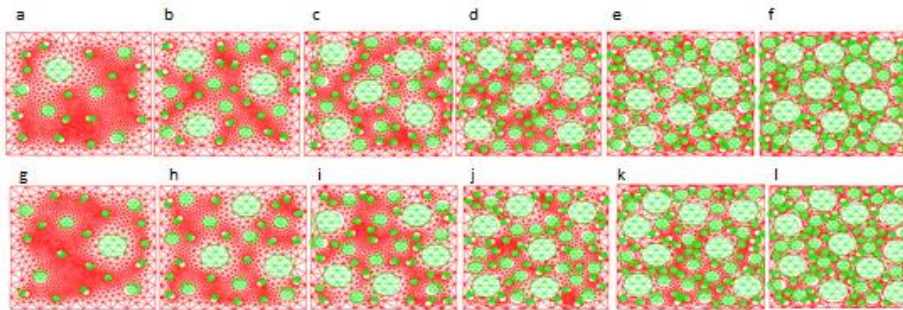
A Figura 19 ilustra os 12 EVRs, sendo o primeiro grupo composto pelos EVRs representados nas figuras 20a, 20b, 20c, 20d, 20e, 20f e o segundo grupo composto pelos EVRs 20g, 20h, 20i, 20j, 20k, 20l.

Para analisar a influência da quantidade de inclusões e sua distribuição, os EVRs foram submetidos a uma deformação macroscópica idêntica para os 12 casos, obtendo-se os valores de tensões homogeneizadas na direção x com as deformações macroscópicas, e com esses gráficos é gerado um novo gráfico que agrupa o resultado de todos os EVRs em um só, que são apresentados na Figura 20.

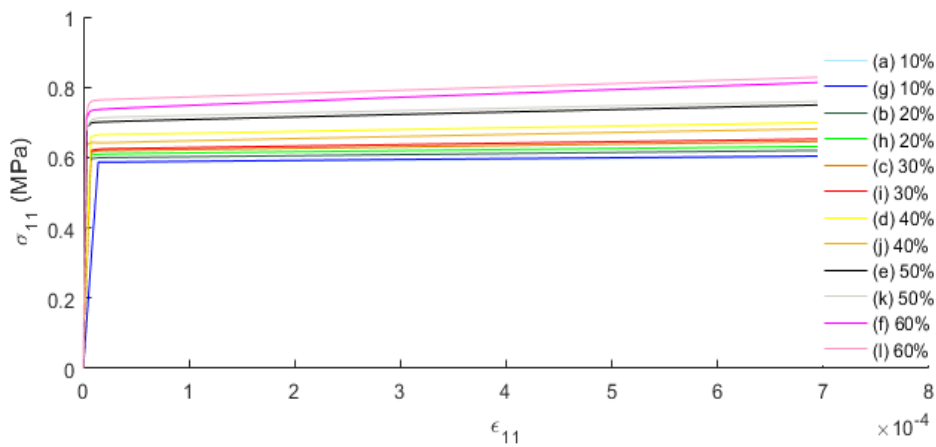
Por meio do gráfico da Figura 20, observa-se que o aumento de volume das inclusões influenciam no comportamento do material, quanto maior o volume de inclusões na microestrutura, mais rígida é a resposta macroscópica do material, e quanto a distribuição, nesse caso percebe-se que ao aumentar o volume do material, aumenta a influência da primeira para a segunda distribuição das inclusões, ou seja, quanto maior o volume, maior a influência dessa distribuição no material, tornando mais rígido o material na segunda distribuição.



**FIGURA 18:** Relação de tensão-deformação na direção x para diferentes modelos de distribuição de inclusões  
**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 19:** EVRs para análise da influência do aumento de volume de inclusões. a)10%. (b)20%. (c)30%. (d)40%. (e)50%. (f)60%. (g)10%. (h)20%. (i)30%. (j)40%. (k)50%. (l)60%.  
**FONTE:** Autor (2017).



**FIGURA 20:** Relação de tensão-deformação na direção x para os diferentes modelos de quantidade e distribuição das inclusões.  
**FONTE:** Autor (2017).



#### 4. CONCLUSÕES

Ao comparar os modelos para verificação da resposta do EVR, modelo de Deslocamento Linear e modelo de Flutuação Periódica, percebe-se que apesar de resultados bem próximos, o modelo de Flutuação Periódica representa melhor a dissipação de energia, obtendo respostas mais flexíveis, estando de acordo com Souza Neto e Feijó (2006). Quando se trata da influência do parâmetro  $\beta$ , ou seja, o parâmetro que relaciona a abertura normal com a abertura por cisalhamento, percebe-se que sua influência é bem pequena para o caso de tração e que quanto menor o seu valor, maior a perda de resistência e rigidez do material e maior o processo de fratura, já para o caso de cisalhamento a influência é praticamente nula. Por fim, a respeito da importância da consideração do descolamento em regime de colapso no CMM, percebe-se uma maior rigidez para o caso da inclusão aderida, por não haver fratura, essa diferença se vê principalmente no caso de tração. Os resultados apresentaram coerência com o comportamento esperado.

Por fim, as respostas obtidas com a formulação proposta encorajam os pesquisadores em seu emprego numa análise multi-escala totalmente acoplada para a análise de estruturas compostas por compósitos estudados nesse trabalho.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

#### 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZIZI, R. **Micromechanical Modeling of Damage in Periodic Composites using Strain Gradient Plasticity**. *Engineering Fracture Mechanics*, Lyngby, Denmark, p. 101 – 113, 2012.

CIRAK, F.; ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. A. **A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmentation**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v 194, p.2604-2618, 2005.

FERNANDES, G. R.; PITUBA, J.J.C.; SOUZA NETO, E.A. **Multi-Scale Modelling for Bending Analysis of Heterogeneous Plates By Coupling BEM and FEM**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 51, p. 1-13, 2015a.

FERNANDES, G. R.; PITUBA, J.J.C.; SOUZA NETO, E.A. **FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 54, p. 47-59, 2015b.

GERMAIN, P.; NGUYEN, Q. S.; SUQUET, P. **Continuum thermodynamics**. *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, 50(4):1010-1020, 1983.

GIUSTI, S. M. **Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas**, 2009. 211f. Tese (Doutorado em Ciências) – Laboratório Nacional de Computação Científica do Ministério da Ciência e Tecnologia da República Federativa do Brasil, Petrópolis, 2009.

OLIVER, J.; CAICEDO, M.; ROUBIN, E.; HERNADÉZ, J. A.; HUESPE, A. **Multi-scale (FE<sup>2</sup>) analysis of materials failure in cement/aggregate-type composite structure**. In: EURO-C, 2004, St. Anton am Alberg, XX. *Anais. Computational Modelling of Concrete Structure*, Londres: CRC PRESS, v.1, p. 39-49. 2014.

LOPES, I. A. R. **Análise de Dano Dúctil Baseada em Modelos Multiescala**. 2013. 139f. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, 2013.

ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. **Finite-deformation irreversible cohesive elements for tree-dimensional crack-propagation analysis**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v 44, p. 1267-1282, 1999.

PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. **Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach**. *Journal Computers and Concrete*, v. 15, n. 5, p. 735-758, 2015.

PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R.; SOUZA NETO, E. A. **Modelling of cohesive fracture and plasticity processes in composite microstructures**. *Journal of Engineering Mechanics*. V. 142, n. 10, 04016069, 2016.

SANTOS, W. F., FERNANDES, G. R., PITUBA, J. J. C. **Analysis of the influence of plasticity and fracture processes on the mechanical behavior of Metal Matrix Composites microstructures**. *Revista Matéria*, v.21, n.3, pp 577-598, 2016.

SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO, R. A. **Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation**. Technical Report n16/2006, Laboratório Nacional de Computação Científica LNCC/MCT, Petrópolis, Brasil, 2006.

VENTURA, A. M. F. M. **Os Compósitos e a sua Aplicação na Reabilitação de Estruturas Metálicas.** Ciência & Tecnologia dos Materiais, Lisboa, Portugal, Vol. 21, nº 3/4, p 1-19, 2009.