

ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS PLANAS

Dynamic nonlinear geometric analysis of plane trusses

Leandro Damas de Oliveira¹, Wellington Andrade da Silva², William Taylor Matias Silva³,
Rodrigo Gustavo Delalibera⁴

Recebido em 19 de setembro de 2016; recebido para revisão em 21 de fevereiro de 2017; aceito em 28 de março de 2017; disponível on-line em 19 de abril de 2017.



PALAVRAS CHAVE:

Análise dinâmica;
Formulação corrotacional;
Não linearidade geométrica;
Trelças planas;
Elementos finitos.

KEYWORDS:

Dynamic analysis;
Corotational formulation;
Geometric non-linearity;
Plane trusses;
Finite elements.

RESUMO: Este trabalho trata da análise dinâmica de trelças no plano, onde estudam-se os efeitos da não-linearidade geométrica nessas estruturas quando solicitadas por carregamentos dinâmicos. Nesse contexto, define-se a formulação baseada na análise não-linear geométrica que descreve o comportamento de trelças discretizadas por elementos finitos, utilizando-se o método corrotacional. Para a resolução dos sistemas não-lineares, utiliza-se o método numérico de Newton-Raphson e para a integração temporal dessas equações, utiliza-se o método de Newmark. Por meio dos eixos corrotacionais é possível separar os movimentos de corpo rígido dos movimentos deformacionais. Para verificar a eficácia da formulação estudada no presente trabalho, foram realizados exemplos com trelças planas usualmente empregadas em análises com grandes não-linearidades geométricas na literatura técnica. De forma geral, a formulação estudada apresentada se demonstrou eficiente para a análise dinâmica de trelças com grandes não-linearidades geométricas.

ABSTRACT: This paper deals with dynamic analysis of two dimensional trusses, where the effects of geometric nonlinearity in these structures is studied when subjected by dynamic loads. In this context, the formulation based on geometric nonlinear analysis that describes the behavior of trusses discretized by finite elements using the Corotational Method is developed. For solving nonlinear systems is used the Numerical Method of Newton-Raphson and for the time integration of these equations is used Newmark Method. Through the corotational axis is possible to separate the rigid body movements from deformational movements. To verify the accuracy of the formulation studied in the present work, examples with plane trusses usually employed in analyzes with large geometric non-linearities in the technical literature were made. In general, the studied formulation presented was efficient for the dynamic analysis of trusses with large geometric nonlinearities.

* Contato com os autores:

¹e-mail: leandro_oliveira@live.com (L. D. de Oliveira)

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

²e-mail: wellington.andrade@gmail.com (W. A. Da Silva)

Engenheiro Civil, Doutor, Professor Adjunto da Universidade Federal de Goiás, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização - IMTec, Faculdade de Engenharia – Regional Catalão.

³e-mail: taylor@unb.br (W. T. M. Silva)

Engenheiro Civil, Doutor, Professor Associado da Universidade de Brasília, Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Faculdade de Tecnologia – Campus Darcy Ribeiro.

⁴e-mail: delalibera@ufu.br (R. G. Delalibera)

Engenheiro Civil, Doutor, Professor Associado da Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Civil – Campus Santa Mônica.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a necessidade de vencer vãos cada vez maiores vem sendo almejada em obras, sejam em locais onde é necessário deixar um vão livre maior ou por questões estéticas. Para estruturas esbeltas, é necessário levar em conta os deslocamentos causados pelos esforços gerados após a aplicação do carregamento pois os mesmos podem influenciar de modo significativo no equilíbrio final da estrutura. Quanto maior o deslocamento, maior será a influência. Levando em consideração maiores deslocamentos, a análise linear não é adequada, fazendo-se necessária uma análise mais aprofundada da estrutura onde é considerado a posição deslocada da estrutura, a saber, análise não-linear geométrica. Quanto mais esbelta for uma estrutura, maior será a necessidade de se avaliar o comportamento não-linear geométrico da mesma (Matias Junior, 1997).

Durante a fase de projeto de uma estrutura, são admitidos carregamentos diversos, tanto permanentes quanto variáveis. Assim, são obtidos os esforços solicitantes através de métodos probabilísticos ou semi-probabilísticos. Então é realizado o equilíbrio das forças para posteriormente dimensionar os elementos estruturais. Usualmente, esse equilíbrio é realizado fazendo-se uma aproximação da realidade, adotando-se a posição indesejada para a estrutura, caracterizando a análise linear geométrica. Para a grande maioria dos projetos convencionais, esse processo é eficiente devido ao pequeno deslocamento quando comparado às dimensões das peças estruturais.

A análise de estruturas pode ser realizada de três maneiras, a saber: a) análise estática, que considera que as ações (cargas recalques, etc.) e os respectivos efeitos (deformações, esforços, internos, etc.) não variam em relação ao tempo; b) análise quase-estática, que considera que as ações e seus efeitos são variáveis em relação ao tempo, mas desprezam-se os efeitos inerciais da estrutura em análise; c) análise dinâmica, onde considera os efeitos inerciais (Aranha Junior, 2003).

O estudo da análise dinâmica não-linear

de estruturas é um dos problemas mais interessantes no campo da engenharia. Quando treliças são consideradas, os fenômenos podem ser observados, por exemplo, para vencer grandes vãos em centros de convenções, aeroportos entre outros. Já para a otimização quanto à análise estrutural, faz-se necessária a utilização de estruturas leves e conseqüentemente, esbeltas. Utilizando análise modal, pode-se descrever uma estrutura em termos de suas características naturais, que são as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as formas modais, ou seja, suas propriedades dinâmicas (Soeiro, 2001). Para resolver as equações diferenciais que surgem quando se trabalha no domínio do tempo se têm os métodos numéricos e analíticos (Borges, 2000).

O método numérico que possibilita representar e analisar diversos fenômenos físicos no meio contínuo mais empregado é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Quando utilizado na solução de problemas com não-linearidade geométrica, em geral, utilizam-se três formulações, consideradas as mais usuais. Pode-se empregar a descrição Lagrangeana Atualizada, Total, e a Cinemática Corrotacional. É oportuno esclarecer que se pode fazer estudos empregando isoladamente a não-linearidade física ou a geométrica, assim como trabalhar conjuntamente com ambos (Felippa e Haugen, 2005).

Na descrição Lagrangeana total, a configuração de referência é fixa, usualmente igual a configuração inicial, sendo a mesma para as análises das tensões e deformações da estrutura. Já na descrição Lagrangeana atualizada, as tensões e deformações são definidas em relação a configuração de referência atualizada, ou seja, as equações são formuladas para a última configuração em equilíbrio, por sua vez, determinada com base no processo de iteração da configuração de referência. No que diz respeito a determinar as equações do MEF pela descrição corrotacional, a configuração de referência é dividida em duas partes, a saber, uma configuração de base e outra corrotacionada, onde essa possibilita medir as tensões e deformações a partir de uma configuração fixa ao longo de toda a análise

(Menin, 2006).

A formulação corrotacional teve sua origem a partir da ideia de separar os movimentos deformacionais e do corpo rígido através dos sistemas de configuração de base e corrotacional, onde esse tem o papel de obter os deslocamentos deformacionais e aquele, medir os deslocamentos do corpo rígido (Silva, 2013). A princípio, foi estudada por Cauchy (1827) e na década de 1960, Truesdell e Noll (1965), descreveram uma teoria defendida por Biot no final da década de 1930. Após a Segunda Guerra Mundial, a indústria aeroespacial impulsionou o desenvolvimento de soluções para problemas de dinâmica das estruturas. Assim, Fraeijs e Veubeke (1976) propuseram a configuração fantasma, que é uma formulação para análise dinâmica de estruturas que utiliza um sistema de eixos corrotacionais. Wempner (1969) introduziu o conceito corrotacional em um contexto do MEF. Rankin e Brogan (1986) introduziram a formulação EICR (Element Independent Corotational Formulation), que foi em seguida melhorada por Rankin e Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid e Rankin (1991), sendo esta a formulação implementada no programa STAGS (Rankin et al., 1998).

Algumas contribuições importantes são atribuídas a Haugen (1994), ao desenvolver elementos triangulares e quadrangulares que continham o grau de liberdade de rotação torcional, e a Hsiao e Hou (1987) e Hsiao et al. (1987), que apresentaram formulações simples e eficientes para a remoção da restrição de pequenas rotações entre dois passos de carga consecutivos. Ainda podem ser destacadas as contribuições de Crisfield (1990) e Crisfield (1997), que enriqueceu o conceito de formulação consistente corrotacional, onde a matriz de rigidez tangente aparece como a variação da força interna e Mattiasson (1983), Mattiasson et al. (1984) e Mattiasson et al. (1986) que combinaram as descrições Lagrangeana total, Lagrangeana atualizada e corrotacional para estudo envolvendo não-linearidade geométrica. É importante destacar as contribuições de Souza (2000), que utiliza a formulação corrotacional para a análise inelástica

de pórticos planos e espaciais com grandes deslocamentos. Battini (2002) implementou uma formulação corrotacional para analisar problemas de instabilidade elástica e plástica de vigas planas e espaciais, partindo das formulações de Crisfield (1990) e Pacoste e Eriksson (1996), sugerindo modificações na forma de parametrização das rotações finitas e incluindo um sétimo grau de liberdade para consideração de ligações rígidas.

2. OBJETIVO

O presente artigo tem o objetivo de contribuir para a validação de uma formulação de elementos finitos para análise dinâmica não-linear geométrica com finalidade de aplicação em treliças planas. Dessa forma, será utilizada a formulação corrotacional com o intuito de analisar a não-linearidade geométrica. O método de Newton-Raphson será utilizado para resolver os sistemas de equações não-lineares e o método de Newmark será utilizado para a integração no tempo.

3. METODOLOGIA

3.1 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

A formulação descrita a seguir foi desenvolvida com base em Crisfield (1991) e Felippa (2001).

Por simplicidade, é adotado como hipótese que os eixos locais (x_0^e, y_0^e) do elemento na configuração C_0 estão alinhados com o sistema de coordenadas globais (X, Y) e (x, y) respectivamente. Por hipótese, a origem dos eixos locais em C_0 está localizado na metade do comprimento L_0 do elemento. O elemento se move da configuração C_0 até a configuração C , cujos eixos locais são definidos como (x^e, y^e) . A configuração corrotacional C_R se move juntamente com o elemento até a configuração C posicionando-se simetricamente em relação a tal configuração. Observa-se que as coordenadas corrotacionais (x_R^e, y_R^e) coincidem com os eixos locais (x^e, y^e) em C . Conforme pode-se observar na Figura 1.

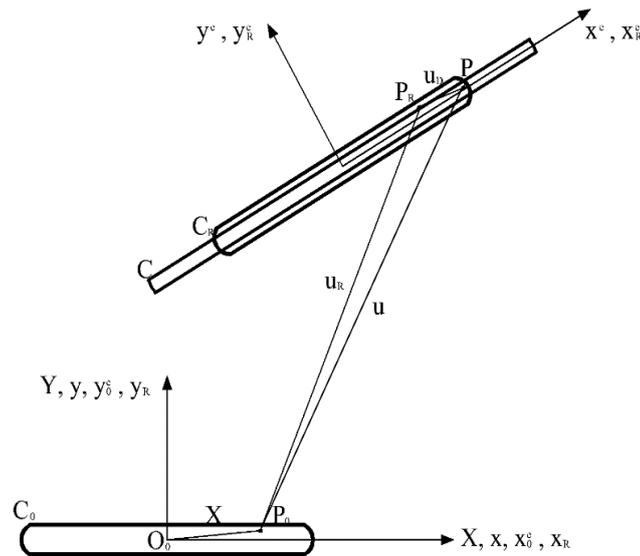


FIGURA 1: Elemento finito de barra articulado nas configurações inicial e atual.

FONTE: Autoria própria (2016).

Seja uma partícula P_0 de coordenadas (X, Y) em C_0 , que se move ao ponto P_R de coordenadas (x_R, y_R) em C_R , e em seguida move-se ao ponto P de coordenadas (x, y) em C . O deslocamento total u , desta partícula, em coordenadas globais pode ser descrito por meio da Equação 1.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x - X \\ y - Y \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [1]}$$

Pode-se decompor este movimento em uma parte deformacional e outra que corresponde ao movimento de corpo rígido como é mostrado na Equação 2.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D = (\mathbf{x}_R - \mathbf{X}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R) \quad \text{Eq. [2]}$$

Esta decomposição é ilustrada na Figura 2. A equação do movimento deformacional em função das coordenadas locais (x^e, y^e) em C é dada por meio da Equação 3.

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_D^e \\ v_D^e \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \quad \text{Eq. [3]}$$

Sendo: \mathbf{Q} a matriz de rotação 2×2 do sistema global (X, Y) ao sistema local (x^e, y^e) de

referência. Os deslocamentos deformacionais u_D^e são utilizados para se obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente. As operações para se obter estes parâmetros são descritas a seguir.

3.1.1 Sistema de coordenadas

Os sistemas de coordenadas local (x^e, y^e) em C e globais (x, y) se relacionam através da Equação 4.

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{u}_0) \quad \text{Eq. [4]}$$

Em que: \mathbf{u}_0 o vetor que representa o deslocamento do ponto O_0 em C_0 ao ponto O em C . A matriz de rotação \mathbf{Q} que aparece nas Equações 3 e 4 pode ser definida, segundo Gere e Weaver (1981), no caso de treliça plana como a Equação 5.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix} \quad \text{Eq. [5]}$$

Sendo: C_x e C_y os cossenos diretores do elemento de barra na configuração atual C (direção do eixo local x^e), em relação ao sistema global de coordenadas, conforme será comentado posteriormente.

Logo, a matriz inversa da Equação 4 é dada por meio da Equação 6.

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y \\ C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^e \\ y^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [6]}$$

Na forma matricial como a Equação 7.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^e + \mathbf{u}_0 \quad \text{Eq. [7]}$$

3.2 OBTENÇÃO DO MOVIMENTO DEFORMACIONAL

A seguir será demonstrado como obtêm-se os deslocamentos deformacionais em coordenadas locais u_D^e . As coordenadas das

partículas P_R em C_R e P em C são dadas pelas Equações 8 e 9.

A interpretação geométrica da Equação 8 pode ser observada na Figura 2. Nesta figura os cossenos diretores (C_x, C_y) do elemento de barra na configuração atual C (direção do eixo local x^e) são calculados em função do ângulo ψ entre os eixos locais x_0^e e x^e no sentido anti-horário, sendo designados respectivamente por $(\cos\psi, \sin\psi)$. Por exemplo, esta figura pode demonstrar que $x_R = u_0 + X\cos\psi - Y\sin\psi$. Tomando-se que $u_D = x - x_R$, e subtraindo as Equações 8 e 9, descritas anteriormente, obtêm-se a Equação 10.

$$\mathbf{x}_R = \begin{Bmatrix} x_R \\ y_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y \\ C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 \quad \text{Eq. [8]}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X + u \\ Y + v \end{Bmatrix} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \text{Eq. [9]}$$

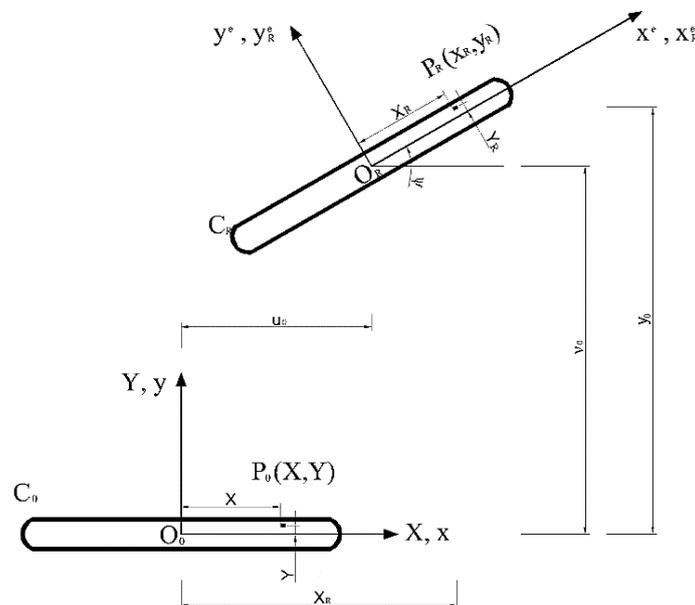


FIGURA 2: Posição de uma partícula P_R na configuração corrotacionada C_R .

FONTE: Autoria própria (2016).

$$\mathbf{u}_D = \begin{Bmatrix} u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - x_R \\ y - y_R \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} 1 - C_x & C_y \\ -C_y & 1 - C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [10]}$$

Na forma matricial como a Equação 11.

$$\mathbf{u}_D = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad \text{Eq. [11]}$$

Finalmente, obtém-se o deslocamento deformacional através da transformação de coordenadas dada pela Equação 12.

$$\mathbf{u}_D^e = \mathbf{Q}\mathbf{u}_D = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad \text{Eq. [12]}$$

3.2.1 Movimento deformacional em função dos deslocamentos nodais

As coordenadas nodais do elemento em C_0 são $X_2 = -X_1 = \frac{1}{2}L_0$ e $Y_2 = Y_1 = 0$, onde L_0 é o comprimento do elemento na configuração C_0 . Sendo assim, os deslocamentos nodais podem ser escritos conforme a Equação 13.

De modo similar, o movimento deformacional do elemento, em função dos deslocamentos nodais, se agrupa na forma vetorial conforme a Equação 14.

Além disso, através da Equação 13, pode-se reescrever a Equação 12 em função dos deslocamentos nodais conforme apresentado na Equação 15.

Sendo o campo de deslocamento do elemento linear em X e em Y , o elemento permanece indeformado na configuração atual C . Logo, pode-se escrever u_0 e v_0 conforme a Equação 16.

Utilizando a notação usual representada pela Equação 17, a Equação 15 pode ser reescrita como a Equação 18.

Em que: $C_y = \sin\psi$ e $C_x = \cos\psi$ se definem através das relações geométricas representadas pelas Equações 19 e 20.

Sendo: L o comprimento do elemento na configuração atual C ; u_{21} e v_{21} são os deslocamentos nodais relativos do elemento entre as configurações C_0 e C .

O vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento são calculados por meio de derivadas direcionais em função da energia de deformação. Assim, obtém-se a derivada primeira e segunda de L em relação a u . A derivada primeira se escreve como conforme a Equação 21, e sua forma vetorial é expressa pela Equação 22.

Utilizando as Equações 19, 20 e 21 e a relação $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$, se obtém a derivada segunda de L em relação a u conforme apresentado na Equação 23.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(X_1, Y_1) \\ v(X_1, Y_1) \\ u(X_2, Y_2) \\ v(X_2, Y_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u\left(-\frac{1}{2}L_0, 0\right) \\ v\left(-\frac{1}{2}L_0, 0\right) \\ u\left(\frac{1}{2}L_0, 0\right) \\ v\left(\frac{1}{2}L_0, 0\right) \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [13]}$$

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1D}^e \\ \mathbf{u}_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e(X_1, Y_1) \\ v_D^e(X_1, Y_1) \\ u_D^e(X_2, Y_2) \\ v_D^e(X_2, Y_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_D^e\left(-\frac{1}{2}L_0, 0\right) \\ v_D^e\left(-\frac{1}{2}L_0, 0\right) \\ u_D^e\left(\frac{1}{2}L_0, 0\right) \\ v_D^e\left(\frac{1}{2}L_0, 0\right) \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [14]}$$

$$\mathbf{u}_D^e = \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \\ u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \\ u_2 - u_0 \\ v_2 - v_0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}L_0 \begin{Bmatrix} 1 - C_x \\ C_y \\ C_x - 1 \\ -C_y \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [15]}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad v_0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \text{Eq. [16]}$$

$$\mathbf{u}_{21} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \quad v_{21} = v_2 - v_1 \quad \text{Eq. [17]}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{2D}^e \\ v_{2D}^e \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} u_{1D}^e \\ v_{1D}^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{21} \\ v_{21} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} L_0 \begin{Bmatrix} C_x - 1 \\ -C_y \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [18]}$$

$$\text{sen}\psi = \frac{v_{21}}{L}, \quad \text{cos}\psi = \frac{L_0 + u_{21}}{L} \quad \text{Eq. [19]}$$

$$L = \sqrt{(L_0 + u_{21})^2 + v_{21}^2} \quad \text{Eq. [20]}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = - \frac{\partial L}{\partial u_1} = \text{cos}\psi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_2} = - \frac{\partial L}{\partial v_1} = \text{sen}\psi \quad \text{Eq. [21]}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -\text{cos}\psi \\ -\text{sen}\psi \\ \text{cos}\psi \\ \text{sen}\psi \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. [22]}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \text{sen}^2\psi & -\text{sen}\psi\text{cos}\psi & -\text{sen}^2\psi & \text{sen}\psi\text{cos}\psi \\ -\text{sen}\psi\text{cos}\psi & \text{cos}^2\psi & \text{sen}\psi\text{cos}\psi & -\text{cos}^2\psi \\ -\text{sen}^2\psi & \text{sen}\psi\text{cos}\psi & \text{sen}^2\psi & -\text{sen}\psi\text{cos}\psi \\ \text{sen}\psi\text{cos}\psi & -\text{cos}^2\psi & -\text{sen}\psi\text{cos}\psi & \text{cos}^2\psi \end{bmatrix} \quad \text{Eq. [23]}$$

3.3 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

São supostas deformações infinitesimais e grandes deslocamentos. Supõe-se também, uma relação linear entre tensão e deformação no intervalo elástico. Considerando essas hipóteses, a energia de deformação do elemento na configuração C é escrita em função das coordenadas locais (x^e, y^e) conforme apresentado na Equação 24.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon^2 dx^e \quad \text{Eq. [24]}$$

Como medida de deformação, se adota as expressões representadas pela Equação 25.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{eng}} &= \frac{L - L_0}{L_0} = \lambda - 1 \\ \varepsilon^{\text{green}} &= \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \end{aligned} \quad \text{Eq. [25]}$$

Lembrando que o termo $d = L - L_0$ é o alongamento do elemento na configuração C em função das coordenadas locais (x^e, y^e) . De fato, pode-se demonstrar que $d = u_{D_2}^e - u_{D_1}^e$, através da

Equação 18. Esta demonstração se descreve conforme a Equação 26.

$$\begin{cases} d = u_{D_2}^e - u_{D_1}^e = \text{cos}\psi u_{21} + \text{sen}\psi - L_0(1 - \text{cos}\psi) \\ \quad = (L_0 + u_{21})\text{cos}\psi + v_{21}\text{sen}\psi - L_0 \\ \quad = \frac{(L_0 + u_{21})^2}{L} + \frac{v_{21}^2}{L} - L_0 = \frac{L^2}{L} - L_0 = L - L_0 \end{cases} \quad \text{Eq. [26]}$$

3.3.1 Vetor de forças internas

Por definição, o vetor de forças internas no que diz respeito às coordenadas locais na configuração C , se expressa conforme a Equação 27.

$$\mathbf{f}_1^e = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_0^L 2EA\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} dx^e = \int_0^L EA\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} dx^e \quad \text{Eq. [27]}$$

Levando-se em conta a Equação 22 para o caso bidimensional e efetuando a integração da Equação 27, obtém-se às expressões do vetor de forças internas conforme apresentado na Equação 28.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^e &= N\beta_0 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \\ \beta_0 &= 1 \Rightarrow \text{def. engenharia} \\ \beta_0 &= \lambda \Rightarrow \text{Green - Lagrange} \quad \text{Eq. [28]} \end{aligned}$$

Em que: $N = EA\varepsilon$ é o esforço axial que atua no elemento. Sendo o coeficiente β_0 resultante da integração da Equação 27, em função da medida de deformação. Lembrando, que foi suposta uma coincidência entre os eixos x_0^e e X . Em uma formulação mais geral, escreve-se o vetor de forças internas em relação às coordenadas globais (X, Y) através da seguinte relação apresentada na Equação 29.

$$\mathbf{f}_g^e = \mathbf{R}^T \mathbf{f}_1^e \quad \text{Eq. [29]}$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \quad \text{Eq. [30]}$$

Em que: \mathbf{R}^T é a matriz de rotação que transforma do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global, $\mathbf{0}$ é uma matriz nula e \mathbf{Q}^T , a transposta de \mathbf{Q} , expressa na Equação 5 para o caso bidimensional.

3.3.2 Matriz de rigidez tangente

De modo similar, se define a matriz de rigidez do elemento como a derivada segunda da energia de deformação em relação aos deslocamentos. Esta expressão se escreve conforme a Equação 31.

$$\mathbf{K}_1^e = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}^2} = \int_0^L EA \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{u}^2} \right] dx^e \quad \text{Eq. [31]}$$

Levando-se em conta as Equações 22 e 23, se chega à expressão da matriz de rigidez tangente apresentada na Equação 32.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^e &= \frac{EA}{L} \alpha_0 \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N\beta_0 \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}^2}, \\ \alpha_0 &= 1 \Rightarrow \text{def. engenharia} \quad \text{Eq. [32]} \\ \alpha_0 &= (3\lambda^2 - 1)/2 \Rightarrow \text{Green - Lagr.} \end{aligned}$$

A expressão da matriz de rigidez tangente

em relação às coordenadas globais (X, Y) é obtida através da relação expressa na Equação 33.

$$\mathbf{K}_g^e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_1^e \mathbf{R} \quad \text{Eq. [33]}$$

Em que: \mathbf{R}^T é a matriz de rotação dada pela Equação 30.

3.4 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

A equação do movimento de um corpo deformável, discretizado pelo método dos elementos finitos, pode ser expressa pela Equação 34.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{d}, t) = \mathbf{p}(t) \quad \text{Eq. [34]}$$

Sendo: \mathbf{M} a matriz de massa; \mathbf{C} a matriz de amortecimento; $\bar{\mathbf{f}}$ o vetor de forças internas dado pela Equação 29; e $\mathbf{p}(t)$ o vetor de forças externas. Assume-se que \mathbf{M} e \mathbf{C} são matrizes constantes. A Equação 34 se trata de uma equação não-linear, uma vez que o vetor de forças internas $\bar{\mathbf{f}}$ é uma função do vetor de deslocamentos \mathbf{d} . Para os exemplos dinâmicos, esse trabalho utiliza-se o método de Newton-Raphson na fase iterativa, com o objetivo de dissipar as forças residuais. Nesse caso, a equação do movimento pode ser escrita como uma função dos deslocamentos, desenvolvida em série de Taylor com os termos de primeira ordem, e uma estratégia incremental-iterativo é estabelecida para a análise dinâmica em passos de tempo.

3.5 MÉTODO DE NEWMARK

Como mencionado anteriormente, o método de Newmark refere-se a uma família de processos implícitos de solução da equação de movimento de um sistema. Sua concepção é baseada na variação linear da aceleração ao longo do intervalo de integração. Cabe ressaltar que o procedimento clássico de Newmark é utilizado no presente trabalho para deslocamentos, velocidades e acelerações translacionais, visto que, devido a propriedade não aditiva das rotações finitas, o processo de atualização das rotações deve ser cuidadosamente tratado. As relações padrões para

velocidade e deslocamento no passo de tempo $n + 1$, se descrevem conforme as Equações 35 e 36.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right] \quad \text{Eq. [35]}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \quad \text{Eq. [36]}$$

Em que: β e γ definem como a aceleração varia em um certo intervalo de tempo, a estabilidade e a precisão do método. Observe que para $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, onde $0 < \beta, \gamma < 1$, obtém-se o método da regra do trapézio, também conhecido como o método da aceleração média. Esses parâmetros estão relacionados com a precisão e estabilidade do método.

A partir das Equações 35 e 36, define-se a predição da velocidade e do deslocamento no passo de tempo $n + 1$, em função das variáveis conhecidas no passo de tempo anterior n , conforme apresentado nas Equações 37 e 38.

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad \text{Eq. [37]}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad \text{Eq. [38]}$$

Utilizando as variáveis preditas \mathbf{u}_{n+1}^* e $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^*$, a velocidade e o deslocamento no passo tempo $n + 1$ se reescrevem conforme as Equações 39 e 40.

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad \text{Eq. [39]}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^* + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad \text{Eq. [40]}$$

Desse modo, a aceleração e a velocidade, no passo tempo $n + 1$, podem ser expressas em função dos deslocamentos \mathbf{u}_{n+1}^* e \mathbf{u}_{n+1} , assumindo a forma apresentada nas Equações 41 e 42.

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \quad \text{Eq. [41]}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \quad \text{Eq. [42]}$$

A forma discreta da equação não-linear do movimento no passo de tempo $n + 1$ pode ser expressa conforme a Equação 43.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{f}_{g_{n+1}} = \mathbf{p}_{n+1} \quad \text{Eq. [43]}$$

Substituindo a Equação 41 na Equação 42, tem-se a Equação 44.

Por se tratar de um problema não-linear, sua forma discreta gera forças desequilibradas ou residuais que se escrevem conforme a Equação 45.

Nesse caso, é necessário empregar uma estratégia incremental-iterativa ao longo do tempo, a fim de dissipar as forças residuais. Consequentemente, expandindo em série de tempo até os termos de primeira ordem o resíduo na iteração k , obtém-se o resíduo na iteração $k + 1$, representado pela Equação 46.

$$\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \right] + \mathbf{f}_{g_{n+1}} = \mathbf{p}_{n+1} \quad \text{Eq. [44]}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \mathbf{C} \left[\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \right] + \mathbf{f}_{g_{n+1}} - \mathbf{p}_{n+1} \neq \mathbf{0} \quad \text{Eq. [45]}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \Delta \mathbf{u}^k + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{u}^k)^2 = \mathbf{0} \quad \text{Eq. [46]}$$

Impondo que o resíduo \mathbf{r}_{n+1}^{k+1} seja nulo, obtém-se da Equação 46 o incremento dos deslocamentos, que é utilizado para atualizar a aceleração, a velocidade e o deslocamento na iteração $k + 1$. Por outro lado, considerando a Equação 45, a matriz tangente iterativa $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}$ é obtida conforme a Equação 47.

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{g_{n+1}}^{k+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad \text{Eq. [47]}$$

$$\mathbf{K}_{g_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{f}_{g_{n+1}}^{k+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad \text{Eq. [48]}$$

Em que: $\mathbf{K}_{g_{n+1}}$ é a matriz de rigidez tangente estática; e $\mathbf{K}_{\text{Dyn},n+1}$ é a matriz de rigidez tangente dinâmica representada pela Equação 50. Portanto, em notação compacta, escreve-se a matriz tangente iterativa total conforme a Equação 49.

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \mathbf{K}_{\text{Dyn},n+1} + \mathbf{K}_{g,n+1} \quad \text{Eq. [49]}$$

$$\mathbf{K}_{\text{Dyn},n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad \text{Eq. [50]}$$

Enfim, se utilizam o deslocamento, a velocidade e aceleração na iteração $k + 1$, em função da correção $\Delta \mathbf{u}^k$ obtida na Equação 46. Levando-se em consideração as Equações 41 e 42, essas atualizações assumem as formas apresentadas nas Equações 51, 52 e 53.

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}^k \quad \text{Eq. [51]}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u}^k \quad \text{Eq. [52]}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}^k \quad \text{Eq. [53]}$$

A convergência para as iterações de equilíbrio é dada pela Equação 54, sendo Tol um valor prescrito de tolerância do erro.

$$\frac{\|\mathbf{r}_{n+1}\|}{\|\mathbf{f}_{g_{n+1}}\|} < Tol \quad \text{Eq. [54]}$$

3.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

São apresentados nesse tópico dois exemplos de treliças planas. O primeiro trata-se de um problema já estudado com carregamentos dinâmicos por Zhu *et al* (1994) e o segundo problema com carregamentos estáticos por Kassimali e Bidhendi (1988) e Zhu *et al* (1994).

Para a análise e geração das curvas, foi desenvolvido um aplicativo nomeado PTRUSS-NLD (*Plane Truss Non-Linear Dynamic*) na linguagem MatLab®.

3.6.1 Arco treliçado raso

O primeiro exemplo aqui considerado, trata-se de uma estrutura proposta por Zhu *et al* (1994), onde um arco raso treliçado bi apoiado possui razão de altura/extensão de aproximadamente 2%. As propriedades mecânicas da seção são apresentadas na Tabela 1. As coordenadas nodais de parte da estrutura estão apresentadas na Tabela 2, visto que a treliça é simétrica. As análises foram realizadas com tolerância de 10^{-5} , utilizando-se 300 incrementos de tempo com passo de tempo $\Delta t = 0,01$. As respostas dinâmicas são obtidas quando uma carga P é aplicada na crista da treliça representada pela Figura 3.

3.6.2 Treliça com duas barras

Devido a pequena quantidade de material e de bons resultados presentes na literatura, propõe-se o estudo dinâmico da treliça analisada com carregamento estático por Kassimali e Bidhendi (1988) e posteriormente por Zhu *et al* (1994). Com o objetivo de se compreender o comportamento deformacional da estrutura no tempo para carregamentos dinâmicos distintos, foram feitas quatro análises aplicando as cargas ilustradas na Figura 5 no nó dois da treliça com duas barras apresentada na Figura 4.

As análises foram realizadas com tolerância de 10^5 , utilizando-se 300 incrementos de tempo com passo de tempo $\Delta t = 0,01$.

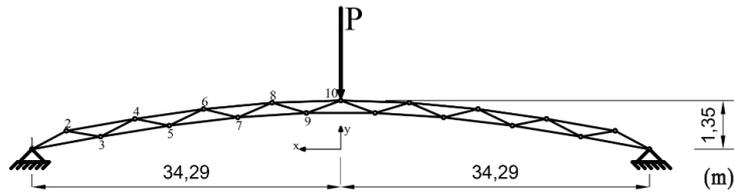


FIGURA 3: Arco treliçado raso bi apoiado

FONTE: Autoria própria (2016).

Tabela 1: Propriedades da seção.

$E =$	$7,17 \times 10^{10}$	N/m^2
$A_b =$	$1,60 \times 10^{-04}$	m^2 (banzo)
$A_d =$	$1,30 \times 10^{-04}$	m^2 (diagonal)
$\rho =$	$2,768 \times 10^3$	kg/m^3

FONTE: Autoria própria (2016).

Tabela 2: Coordenadas dos nós do arco treliçado raso.

nó	x (mm)	y (mm)	nó	x (mm)	y (mm)
1	3429,00	0,00	6	1524,00	110,85
2	3048,00	50,65	7	1143,00	87,99
3	2667,00	34,75	8	762,00	128,50
4	2286,00	83,82	9	381,00	100,05
5	1905,00	65,30	10	0,00	134,60

FONTE: Autoria própria (2016).

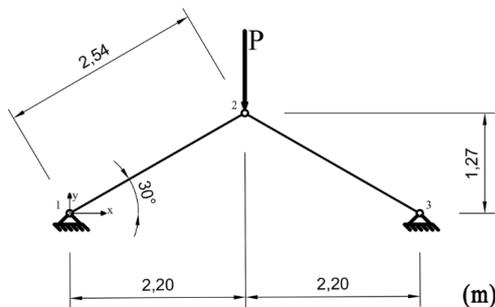


FIGURA 4: Treliça com duas barras.

FONTE: Autoria própria (2016).

Tabela 3: Propriedades da seção.

$E =$	$2,00 \times 10^{11}$	N/m^2
$A =$	$6,45 \times 10^{-4}$	m^2
$\rho =$	$7,87 \times 10^3$	kg/m^3

FONTE: Autoria própria (2016).

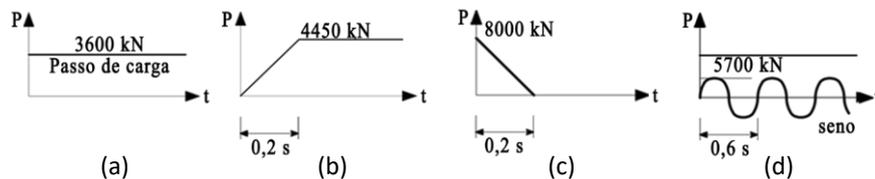


FIGURA 5: Tipos de carregamentos dinâmicos analisados na treliça da Figura 4.

FONTE: Autoria própria (2016).

As análises foram feitas aplicando as cargas na direção y do nó dois com tolerância de 10^{-5} . A primeira análise foi feita baseando-se no tipo de carregamento apresentado na Figura 5a, onde a estrutura é submetida a uma carga súbita definida por uma constante. Foram utilizados 800 incrementos de tempo com passo de tempo $\Delta t = 0,0001$.

A segunda análise foi feita simulando uma carga rampa de duração infinita definida por um carregamento linear seguido por um constante (Figura 5b). Foram utilizados 400 incrementos de tempo com passo de tempo $\Delta t = 0,001$.

Já a terceira análise é feita uma simulação de um pulso de carga com duração de 0,2 segundos definido por um carregamento triangular (Figura 5c). Foram utilizados 4000 incrementos de tempo com passo de tempo $\Delta t = 0,0001$.

Por último, foi realizada a quarta análise da estrutura quando submetida a um carregamento harmônico com período de vibração $T = 0,6$ s (Figura 5d), definida pela expressão senoidal para o carregamento no topo da estrutura $F_y(t) = 5700 \text{ sen}(1,6667 t)$ (kN). Foram utilizados 100 incrementos de tempo com passo de tempo $\Delta t = 0,05$.

4. RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 ARCO TRELIÇADO RASO

Os resultados obtidos para o primeiro exemplo estão apresentados na Figura 6. Para esse caso, foi analisado um passo de carga constante no nó dez do arco treliçado (Figura 3). Observa-se uma boa concordância entre os históricos de deslocamentos da treliça apesar de indicar uma pequena defasagem de aproximadamente 0,01s. Percebe-se que a formulação proposta nesse trabalho representou melhor as não-linearidades apresentadas pela estrutura, visto que a curva obtida por Zhu et al (1994) apresentou uma oscilação harmônica suave.

Observa-se que as curvas apresentam oscilações de média escala e de períodos com valores similares. Segundo Zhu et al (1994), devido às não-linearidades presentes na estrutura, a amplitude de vibração não será a mesma, bem como o período de oscilação. Ao estudar a curva em um intervalo de tempo maior, percebe-se que a tendência das amplitudes é aumentar.

4.2 TRELIÇA COM DUAS BARRAS

A seguir, na Figura 7, tem-se a resposta no tempo obtida pelo programa PTRUSS-NLD para o deslocamento no nó dois da treliça quando solicitada pelos carregamentos dinâmicos.

Os resultados obtidos para o primeiro caso

(Figura 5a) estão apresentados na Figura 7a. Observa-se que o nó apresenta oscilações harmônicas suaves de grande escala. Segundo Zhu et al (1994), devido às não-linearidades, a amplitude de vibração aumenta com o passar do tempo analisado.

Observa-se na Figura 7b um grande deslocamento inicial que estabiliza 0,2 segundos após a inserção do carregamento. Após 0,2 segundos o resultado apresenta uma oscilação harmônica suave de pequena escala com leve variação de acréscimo da amplitude.

Na Figura 7c, observa-se que o nó tem um deslocamento inicial devido ao pulso de carga de 0,2 segundos. Após esse intervalo de tempo, assim como na Figura 7a, a oscilação tem uma tendência de aumentar a amplitude de vibração devido às não-linearidades da estrutura. Percebe-se que ao inserir um pulso de carga maior, consequentemente a não-linearidade da função se mostra mais visível, além de aumentar as amplitudes de oscilação.

No quarto caso apresentado na Figura 5d, a inserção do carregamento senoidal de frequência $f = 1,6667 \text{ Hz}$ gerou uma curva que capturou as não-linearidades da estrutura. Isto pode ser observado nos picos de amplitude do gráfico apresentado na Figura 7d. Percebe-se que amplitudes sempre serão diferentes devido às não-linearidades, o que pode levar à estrutura a entrar em ressonância.

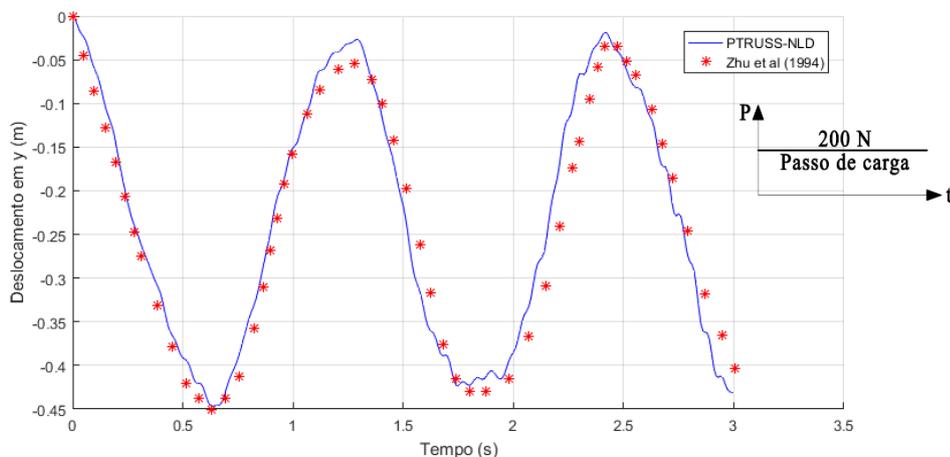


FIGURA 6: Resposta dinâmica não-linear do arco treliçado raso bi apoiado.

FONTE: Autoria própria (2016).

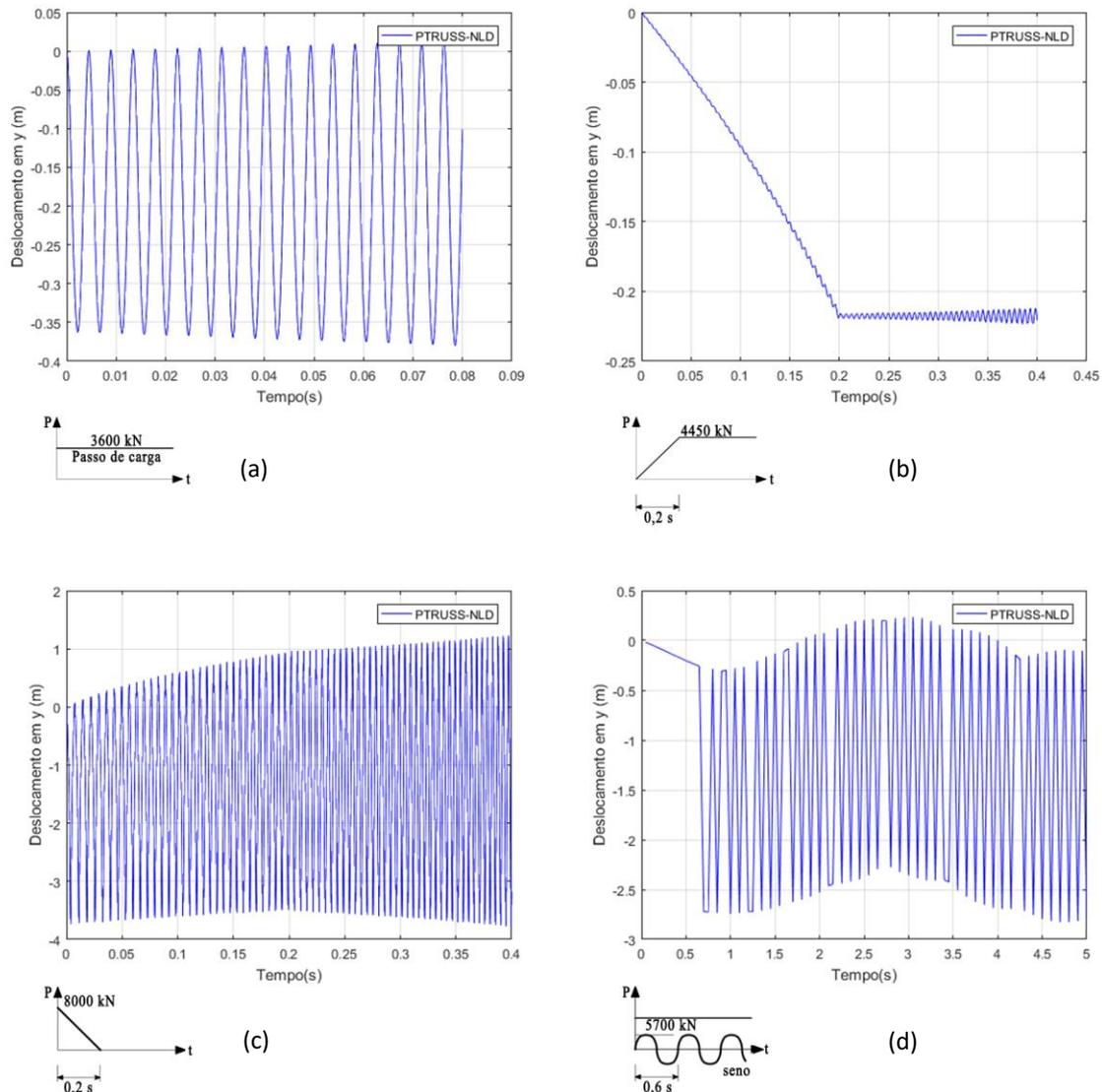


FIGURA 7: Resposta não-linear para os diferentes tipos de carregamentos dinâmicos aplicado na estrutura: a) carga constante; b) carga rampa; c) pulso de carga; d) carga senoidal com período de 0,6 segundos.

FONTE: Autoria própria (2016).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi utilizada a formulação corrotacional com o intuito de analisar a não-linearidade geométrica e o método de Newton-Raphson foi utilizado para resolver os sistemas de equações não-lineares em conjunto com o método de Newmark para a integração no tempo. O comportamento dos carregamentos dinâmicos aplicados em treliças foi estudado nesse artigo, onde, através dos exemplos apresentados, pode-se concluir que a inclusão de não-linearidades pode provocar grandes alterações na resposta dinâmica.

Considerando que Zhu et al (1994) utilizou a formulação Lagrangeana atualizada para a obtenção da resposta dinâmica não-linear do arco

treliçado (Figura 3), quando comparada com os resultados obtidos para a descrição Corrotacional implementada no aplicativo PTRUSS-NLD, os resultados se mostraram coerentes e satisfatórios, pois possuem uma defasagem de aproximadamente duas casas decimais. Observa-se ainda que em função da formulação proposta neste artigo apresentar uma matriz de rigidez tangente iterativa consistente (Equação 47), a mesma demonstrou a capacidade de capturar grandes não-linearidades geométricas, diferente da resposta apresentada por que Zhu et al (1994).

Apesar do segundo exemplo ter apenas duas barras, o mesmo demonstrou apresentar grandes não-linearidades. Dessa forma, os autores recomendam a utilização desses resultados para a

validação de outras formulações que levem em consideração a não-linearidade geométrica em análises dinâmicas não-lineares.

Por conseguinte, este trabalho contribui, principalmente no cenário nacional, ao estudo da não-linearidade geométrica no campo da análise dinâmica não-linear de treliças planas, uma vez que a pesquisa bibliográfica realizada revelou existir uma escassez de trabalhos sobre esse tema no Brasil. Além disso, a formulação proposta no presente trabalho demonstrou ter grande potencialidade para análise estrutural dinâmica não-linear de treliças planas esbeltas, o que torna a sua aplicação muito interessante em projetos estruturais do campo da engenharia civil e engenharia mecânica que utilizem esse sistema estrutural.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARANHA JÚNIOR, G. Y. R. **A formulação de um elemento finito de barra para análise dinâmica não-linear geométrica, com aplicação a cabos de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica.** 155 f. Dissertação (Título de mestre em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Pará – UFPA, Belém, 2003.
- BATTINI, J.M., (2002). **Co-rotational beam elements in instability problems.** Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology - Department of Mechanics, Stockholm / Sweeden. Belytschko e Hsieh (1973)
- BORGES, Romes A. **Métodos de Perturbação para Equações Algébricas Não-Lineares,** 2000. 27 f.. Monografia (Especialização em Matemática) Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão – GO.
- CAUCHY, A. L. **De la pression ou tension dans un corps solide.** Exercices de Mathématiques, Volume 2, 42-56, Paris, 1827.
- CRISFIELD, M. A. **A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements.** In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81, 131-150. Crisfield (1991), 1990.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures.** Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- FELIPPA, C. A. **Non-linear finite element methods / NFEM,** Lecture notes for the course non-linear finite element methods, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA, 2001.
- FELIPPA, C.A.; HAUGEN, B. **A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory.** In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 2285-2336 (2005).
- FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. M. **The dynamics of flexible bodies.** In: *International Journal of Engineering Science*, 14, 895-913, 1976.
- GERE, J.; WEAVER, W. **Análise de Estruturas Reticuladas,** Editora Guanabara, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.
- HAUGEN, B. **Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements,** Ph.D Thesis, University of Colorado, USA, 1994.
- HSIAO, K. M.; HOU, F. Y. **Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Frames.** In: *Computers & Structures*, 26, 693-701, 1987.
- HSIAO, K. M.; JANN, H.; CHEN, Y. R. **A corotational procedure that handles large rotations of spacial beam structures.** In: *Computers & Structures*, 27, 769-781, 1987.
- KASSIMALI, A.; BEDHENDI, E. **Stability of trusses under dynamic loads.** *Compur. Srrucr.* 29, 381-392, 1988.
- MATIAS JUNIOR, I. G. **Análise não-linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis.** 1997. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- MATTIASSON, K. **On the corotational finite element formulation for large deformation problems.** Dr. Ing. Thesis, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Goteborg, 1983.
- MATTIASSON, K.; BENGSTON, A.; SAMUELSSON, A. **On the accuracy and efficiency of numerical algorithms for geometrically nonlinear structural analysis.** In: P.G. Bergan, K.J. Bathe, W. Wunderlich (Eds.), *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 3-23, 1986.
- MATTIASSON, K.; SAMUELSSON, A. **Total and updated Lagrangian forms of the corotational finite element formulation in geometrically and materially nonlinear analysis.** In: C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen (Eds.), *Numerical Methods for Nonlinear Problems II*, Pineridge Press, Swansea, 134-151, 1984.
- MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática corrotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas.** 2006. 190p. Tese (Doutorado), Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. C. **Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors.** In:

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 93, 353-384, 1991.

PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. **Beam element in instability problems**, Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 144, pp. 163-197, 1996.

RANKIN, C. C.; BROGAN, F. A. **An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations**. In: Journal Pressure Vessel Technology, ASME, 108, 165-174, 1986.

RANKIN, C. C.; BROGAN, F. A.; LODEN, W. A.; CABINESS, H. **STAGS User Manual**. LMMS P032594, Version 3.0, January, 1998.

RANKIN, C. C.; NOUR-OMID, B. **The use of projectors to improve finite element performance**. In: Computers & Structures, 30, 257-267, 1988.

SILVA, W. A. **Análise dinâmica não-linear de pórticos espaciais utilizando a formulação corrotacional**. 2013. 197 p. Tese (Doutorado). Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

SOEIRO, N. S. **Análise modal experimental**. Apostila de aula. Belém - PA, 2001.

SOUZA, R.M. **Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames**, Doctor of Philosophy Thesis, Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2000.

TRUESDELL, C.; NOLL, W. **The Nonlinear Field theories of Mechanics**. S. Flügge, Handbuch der Physik, Vol. III/3, Springer-Verlag, 1965.

WEMPNER, G. A. **Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells**. In: International Journal of Solids and Structures, 5, 117-153, 1969.

ZHU, K.; AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. **Nonlinear dynamic analysis of lattice structures**. Computers & Structures, v. 52, p. 9-15, 1994.