

AValiação DO DESEMPENHO DO MÉTODo CPPM EM ANÁLISES ELASTOPLÁSTICAS

Performance evaluation of the closest point projection method in elastoplastic analysis

Evaluación del desempeño del método CPPM en análisis elastoplásticos

María Paz Duque Gutiérrez¹, William Taylor Matias Silva²

Recebido em 16 de novembro de 2015; recebido para revisão em 05 de fevereiro de 2016; aceito em 04 de abril de 2016; disponível on-line em 15 de junho de 2016.



PALAVRAS CHAVE:

Plasticidade;
Endurecimento não linear;
Critério de von Mises .

KEYWORDS:

Plasticity;
Non-linear hardening;
Von Mises criterion.

RESUMO: O método de projeção do ponto mais próximo (CPPM, closest point projection method) é amplamente utilizado quando se apresentam respostas não lineares no comportamento dos materiais. Este artigo destina-se ao detalhamento e formulação analítica do método e avaliar com exemplos simples seu desempenho utilizando distintas leis de endurecimento não lineares para definir a evolução das deformações plásticas. O método é implementado sob uma cinemática de deformações infinitesimais. É considerado que o material possui propriedades elásticas constantes. O critério de escoamento de von Mises é utilizado com uma regra associativa de fluxo para descrever o comportamento tensão-deformação do material. A principal contribuição deste trabalho é verificar a robustez do método e apresentar explicação completa da formulação analítica.

ABSTRACT: The closest point projection method is widely used when nonlinear responses occur in the behavior of the materials. The aim of this work is detailing its analytical formulation with simple examples and evaluates the performance of the method using different nonlinear hardening laws to define the evolution of plastic deformation. The method is implemented under a kinematic of infinitesimal strains, it is considered a material with constant elastic properties, the von Mises yield criterion and an associative flow rule is used to describe the stress - strain behavior of the material. The main contribution of this work is to verify the robustness of the method and the complete explanation of the analytical formulation.

RESUMEN. El método de proyección al punto más próximo (CPPM, closest point projection method) es ampliamente utilizado cuando se presentan respuestas no lineales en el comportamiento de los materiales. Se pretende con este trabajo detallar su formulación analítica y evaluar con ejemplos simples el desempeño del método utilizando diferentes leyes de endurecimiento no lineales para definir la evolución de las deformaciones plásticas. El método es implementado bajo una cinemática de deformaciones infinitesimales. Se considera un material con propiedades elásticas constantes, se emplea el criterio de fluencia de von Mises y una regla asociativa de flujo para describir el comportamiento tensión - deformación del material. La principal contribución de este trabajo es la verificación de la robustez del método y la explicación completa de la formulación analítica.

* Contato com os autores:

¹e-mail: mpazduque@gmail.com (M. P. D. Gutiérrez)

Estudante de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, UnB.

²e-mail: taylor@unb.br (W. T. M. Silva)

Professor Doutor Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, UnB.

1. INTRODUÇÃO

Cuando se presentan respuestas no lineales en el comportamiento de los materiales, se hace necesario desenvolver e implementar diversos algoritmos para su tratamiento computacional. Al ser utilizado el método de los elementos finitos, la respuesta del material es considerada por medio de formulaciones incrementales, es decir, dado un incremento en las deformaciones $\Delta\epsilon$, se calcula el correspondiente incremento en las tensiones $\Delta\sigma$. Primero es necesario determinar si el incremento en la deformación causará un comportamiento elastoplástico o elástico. Dada la formulación incremental, el modelo constitutivo debe ser integrado a nivel local. En general, existe una clase de algoritmos, ampliamente utilizada, conocida como algoritmos predictor elástico–corrector plástico. El método fue introducido por Wilkins (1964), para un material con criterio de fluencia de von Mises perfectamente plástico, siendo después desarrollado y aplicado por Simo y Taylor (1985) quienes demostraron que el uso del operador tangente continuo destruye la convergencia cuadrática asociada con el método de Newton y que mediante el uso de un operador tangente consistente la convergencia cuadrática puede ser preservada. En el trabajo de Borst y Heeres (2002) se muestra como los conceptos para integrar la tasa de las ecuaciones de plasticidad estándar por medio de un algoritmo implícito pueden ser generalizados a la teoría de la plasticidad sin un criterio de fluencia definido explícitamente. El método fue luego generalizado por Kojic (2002) a lo que ahora se conoce como método del parámetro que gobierna para problemas con viscoplasticidad.

Esencialmente los cálculos son realizados en dos pasos. En el primero, la respuesta inelástica del material se mantiene congelada, el incremento total es aplicado como si fuera puramente elástico, luego es calculada una tensión elástica correspondiente conocida como predictor elástico. En el segundo, si el comportamiento es elastoplástico, la tensión calculada es traída de vuelta a la superficie de fluencia mediante la aplicación de una deformación inelástica adecuada. Este método equivale a encontrar la proyección más próxima del predictor elástico a la superficie de

fluencia, por esta razón el método es referido como método de proyección al punto más próximo (*Closest Point Projection Method, CPPM*). Una desventaja del método es que necesita los gradientes del flujo plástico con respecto al tensor de tensiones y el tensor de variables internas, que puede resultar una tarea difícil para ciertos modelos. En este trabajo el método es aplicado para el criterio de fluencia de von Mises, el cual es ampliamente utilizado porque su aplicación resulta práctica y simple. CPPM es un método implícito que utiliza el procedimiento conocido como *Backward Euler*. Como el estado final de tensiones es forzado a permanecer en la superficie de fluencia, el algoritmo aplica la propiedad de consistencia de la expresión matemática de la superficie de fluencia, ANANDARAJAH (2010). Se presentan ejemplos simples utilizando diferentes reglas para la evolución de las deformaciones plásticas, resultando adecuada una ley con endurecimiento isotrópico cuando las cargas son aplicadas monotónicamente y para el caso de cargas cíclicas, se utiliza una ley con endurecimiento cinemático, ambas leyes no lineales

Existen en la literatura pocos trabajos donde se explique la formulación analítica y la implementación numérica del CPPM, y en algunos, la notación utilizada resulta pesada para el lector, por ejemplo en Armero (2002), se describen variaciones del método para materiales perfectamente plásticos o con endurecimiento isotrópico no lineal, así como algunas estrategias para superar dificultades en la convergencia del método. Aplicaciones en geomecánica se presentan en el trabajo de Wang et al. (2004) donde el método es utilizado para la integración de los modelos de Mohr-Coulomb y de Matsuoka–Nakai. Para consulta de otros métodos de integración de modelos constitutivos se recomienda el libro de CRISFIELD (1991).

2. OBJETIVO

El objetivo de este trabajo consiste en la descripción paso a paso de la formulación analítica del CPPM y su implementación numérica para verificar su robustez.

3. ESTRUCTURA GENERAL DE LA TEORÍA DE LA PLASTICIDAD

La teoría de plasticidad, cuando son consideradas pequeñas deformaciones y para materiales cuya respuesta es independiente de la velocidad de deformación, tiene como principales conceptos: El tensor de deformaciones totales en un punto es calculado como la suma de las deformaciones recuperables (elásticas) y las no recuperables (plásticas), representado por la Ecuación 1.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad \text{Ec.[1]}$$

En que:

ε : Tensor de deformaciones totales;

ε^e : Parte elástica del tensor de deformaciones;

ε^p : Parte plástica del tensor de deformaciones.

Para el caso de modelos envolviendo comportamientos no lineales de los materiales, dado un incremento de deformación, no solo debe ser obtenido el incremento en las tensiones, sino también el incremento de las variables internas ζ que cuantifican el efecto del comportamiento anterior del material. Es decir (Ecuación 2):

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \zeta) \quad \text{Ec.[2]}$$

En que:

σ : Tensor de tensiones (GPa);

ζ : Tensor de variables internas.

Otro concepto fundamental es la definición de una superficie de fluencia que limita el tipo de respuesta del material. El dominio dentro de la superficie es un dominio puramente elástico, el dominio fuera de la superficie no puede ser alcanzado por el material por lo que representa un comportamiento inaccesible y en la superficie es definido como un comportamiento elastoplástico. La función de fluencia debe ser definida matemáticamente tal que, cuando se trata de un comportamiento elastoplástico, se cumpla Ecuación 3:

$$\varphi(\sigma, \zeta) = 0 \quad \text{Ec.[3]}$$

En que:

φ : Superficie de fluencia.

La superficie de fluencia debe cambiar su tamaño, forma o lugar en el espacio de tensiones, de tal forma que cuando el comportamiento sea

elastoplástico, el tensor de tensiones siempre permanezca en la superficie, lo que es representado por la Ecuación 4:

$$\dot{\varphi}(\sigma, \zeta) = 0 \quad \text{Ec.[4]}$$

En que:

$\dot{\varphi}$: Derivada de primer orden de la superficie de fluencia.

La expresión matemática de la función de fluencia debe ser tal que exista un tensor normal a ella en el estado actual de tensiones, este tensor define la dirección del tensor de deformaciones plásticas, y es definido como (Ecuación 5):

$$r = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \quad \text{Ec.[5]}$$

En que:

r : Vector de flujo plástico;

$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$: Derivada parcial de φ en relación a σ .

Para definir la evolución de las variables internas se hace necesaria la definición de una función de endurecimiento $\$, que varía con cada modelo constitutivo y con la ley de evolución adoptada.$

4. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Puesto que la relación entre las tensiones y las deformaciones es no lineal, es necesario transformar el problema continuo en uno discreto, esto se logra aplicando un esquema implícito *Bacward Euler*. Para el caso de materiales con propiedades elásticas constantes, como es el caso de los metales, el predictor elástico permanece constante dentro de cada iteración. Conocidos los valores de tensiones y variables internas en un determinado paso de carga n , es decir conocidos σ^n y ζ^n , el objetivo de la implementación del método es encontrar los valores correspondientes al siguiente paso de carga, σ^{n+1} y ζ^{n+1} . El valor final de σ^{n+1} será la suma del tensor de prueba inicial y del corrector plástico final (Ecuación 6). El tensor de prueba inicial es calculado a su vez como la suma del estado actual de tensiones y del predictor elástico.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma^{ep} + \Delta\sigma^{pc} = \sigma_{n+1}^{tr} + \Delta\sigma^{pc} \quad \text{Ec.[6]}$$

En que:

σ_n : Tensor de tensiones en el paso de carga n (GPa);
 σ_{n+1} : Tensor de tensiones en el paso de carga $n+1$ (GPa);
 $\Delta\sigma^{ep}$: Tensor predictor elástico (GPa);
 $\Delta\sigma^{pc}$: Tensor corrector plástico (GPa);
 σ_{n+1}^{tr} : Tensor de tensiones de prueba en el paso de carga $n+1$ (GPa).

El tensor de prueba es calculado como si el incremento en las tensiones fuera puramente elástico, así el predictor elástico puede ser calculado por medio de la Ecuación 7.

$$\Delta\sigma^{ep} = C\Delta\varepsilon \quad \text{Ec.[7]}$$

En que:

C : Tensor constitutivo del modelo en la fase elástica (GPa);

$\Delta\varepsilon$: Incremento en el tensor de deformaciones.

Si el predictor elástico no cumple el criterio de fluencia utilizado, el corrector plástico trae de vuelta al tensor de prueba hacia la superficie de fluencia, y es definido por la Ecuación 8.

$$\Delta\sigma^{pc} = -\Delta\lambda Cr^{n+1} \quad \text{Ec.[8]}$$

En que:

$\Delta\lambda$: Incremento del multiplicador plástico;

r^{n+1} : Vector de flujo plástico.

El tensor de variables internas actualizado es definido adicionando un incremento que dependerá del valor final del multiplicador plástico y del valor de la función de endurecimiento en el estado actual, Ecuación 9.

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \Delta\zeta, \quad \Delta\zeta = \Delta\lambda \hat{s}^{n+1} \quad \text{Ec.[9]}$$

En que:

ζ_{n+1} : Valor del tensor de variables internas en el paso de carga $n+1$;

\hat{s}^{n+1} : Valor de la función de endurecimiento en el paso de carga $n+1$.

Los valores finales de tensiones y variables internas deben ser tales que cumplan la Ecuación 10.

$$\varphi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}) = 0 \quad \text{Ec.[10]}$$

En que:

φ : Valor de la superficie de fluencia en el paso de carga $n+1$.

El proceso de integración consiste entonces en aplicar un incremento elástico en las tensiones, dado un incremento en el tensor de deformaciones y mediante un esquema iterativo calcular el tensor corrector hasta satisfacer el criterio de fluencia. Para el modelo de von Mises, el tensor constitutivo es calculado mediante la Ecuación 11.

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad \text{Ec.[11]}$$

En que:

K : Módulo de Bulk (GPa);

G : Módulo de cortante (GPa);

δ_{ij} : Operador Delta de Kronecker, igual a 1 cuando $i=j$ e igual a 0 cuando $i \neq j$.

Es utilizado el tensor de prueba σ_{n+1}^{tr} para una primera estimativa del valor de las tensiones y variables internas, es decir (Ecuaciones 12 a y 12 b):

$$\sigma_{n+1}^1 = \sigma_{n+1}^{tr} - \Delta\lambda Cr^{tr} \quad \text{Ec.[12a]}$$

$$\zeta_{n+1}^1 = \zeta_n + \Delta\lambda \hat{s}^{tr} \quad \text{Ec.[12b]}$$

En que:

r^{tr} : Valor de prueba del vector de flujo plástico.

ζ^{tr} : Valor de prueba del tensor de tensiones internas.

Donde el vector de flujo r^{tr} es calculado por la Ecuación 13.

$$r^{tr} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{n+1}^{tr}} \quad \text{Ec.[13]}$$

Un estimativo del multiplicador plástico $\Delta\lambda$ para dar inicio al proceso iterativo, puede ser calculado por la Ecuación 14.

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\varphi^{tr}}{[r^T Cr + K_p]^{tr}} \quad \text{Ec.[14]}$$

En que:

K_p : Módulo plástico.

Como fue verificado que el tensor de prueba no cumple el criterio de fluencia, es decir, $\varphi > 0$, son calculadas las diferencias del estado de tensiones y las variables internas entre la iteración anterior y la actual. Llamaremos esas diferencias ecuaciones residuales y son calculadas con las Ecuaciones 15a, 15b y 15c.

$$R_\sigma(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}, \Delta\lambda) = \sigma_{n+1} - [\sigma_n + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda Cr^{n+1}] \quad \text{Ec[15a]}$$

$$R_\zeta(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}, \Delta\lambda) = \zeta_{n+1} - [\zeta_n + \Delta\lambda \hat{s}^{n+1}] \quad \text{Ec.[15b]}$$

$$R_\varphi = \varphi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}) \quad \text{Ec.[15c]}$$

En que:

$R\sigma$: Diferencia entre las tensiones de la iteración actual y la anterior;

$R\zeta$: Diferencia entre las variables internas de la iteración actual y la anterior;

$R\varphi$: Función de fluencia de la iteración actual.

Durante la primera iteración los residuales son calculados utilizando σ_{n+1}^1 , ζ_{n+1}^1 y $\Delta\lambda_1$ para σ_{n+1} y ζ_{n+1} . Esto requiere el cálculo de r^{n+1} en el estado σ_{n+1}^1 y ζ_{n+1}^1 . Para continuar el proceso y actualizar las variables, las ecuaciones residuales son linealizadas en torno a σ_{n+1}^1 y ζ_{n+1}^1 como en las Ecuaciones 16.

$$R^1_{\sigma_{ij}} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta\lambda} \right]_1 \partial \Delta\lambda = 0 \quad \text{Ec.[16a]}$$

$$R^1_{\zeta_{kl}} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{kl}}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{kl}}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{kl}}}{\partial \Delta\lambda} \right]_1 \partial \Delta\lambda = 0 \quad \text{Ec.[16b]}$$

$$R^1_{\varphi} + \left[\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} = 0 \quad \text{Ec.[16c]}$$

Escribiendo las ecuaciones residuales en notación tensorial, podemos escribir las Ecuaciones 17.

$$R_{\sigma_{ij}} = \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n - C_{ijpq} \Delta \varepsilon_{pq} + \Delta \lambda C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} \quad \text{Ec.[17a]}$$

$$R_{\zeta_{ij}} = \zeta_{ij}^{n+1} - \zeta_{ij}^n - \Delta \lambda \hat{s}_{ij}^{n+1} \quad \text{Ec.[17b]}$$

$$R_{\varphi} = \varphi^{n+1}(\sigma_{ij}^{n+1}, \zeta_{ij}^{n+1}) \quad \text{Ec.[17c]}$$

Derivando las Ecuaciones 15. Podemos obtener los coeficientes de las Ecuaciones 16. Representan valores numéricos pues son evaluados en σ_{n+1}^1 y ζ_{n+1}^1 y así obtenemos las Ecuaciones 18. El subíndice 1 es suprimido para simplificar la notación.

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \sigma_{kl}} [\Delta \varepsilon_{pq} - \Delta \lambda r_{pq}^{n+1}] + \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{Ec.[18a]}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} = \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad \text{Ec.[18b]}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} \quad \text{Ec.[18c]}$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta \lambda \frac{\partial \hat{s}_{ij}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{Ec.[18d]}$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} = 1 - \Delta \lambda \frac{\partial \hat{s}_{ij}^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad \text{Ec.[18e]}$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = -\hat{s}_{ij}^{n+1} - \Delta \lambda \frac{\partial \hat{s}_{ij}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} \quad \text{Ec.[18f]}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = r_{kl}^{n+1} \quad \text{Ec.[18g]}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \zeta_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad \text{Ec.[18h]}$$

Para el cálculo de los anteriores coeficientes son necesarias las siguientes cantidades: Los valores de C , r , $\partial \varphi / \partial \zeta$, $\Delta \lambda$ y \hat{s} en el incremento de carga $n+1$ en la iteración actual y los gradientes $\partial C / \partial \sigma$, $\partial r / \partial \sigma$, $\partial r / \partial \zeta$, $\partial \hat{s} / \partial \sigma$, $\partial \hat{s} / \partial \zeta$, $\partial \hat{s} / \partial \Delta \lambda$. Las Ecuaciones 16 son solucionadas simultáneamente para encontrar las tres incógnitas, $\delta \sigma_{ij}$, $\delta \zeta_{ij}$, y $\delta \Delta \lambda$ para calcular los nuevos valores estimados mediante las Ecuaciones 19.

$$\sigma^2_{n+1} = \sigma^1_{n+1} + \delta \sigma \quad \text{Ec.[19a]}$$

$$\zeta^2_{n+1} = \zeta^1_{n+1} + \delta \zeta \quad \text{Ec.[19b]}$$

$$\Delta \lambda^2 = \Delta \lambda^1 + \delta \Delta \lambda \quad \text{Ec.[19c]}$$

Son evaluados de nuevo los residuales definidos por las Ecuaciones 15. Probablemente los valores obtenidos para los residuales no sean lo suficientemente pequeños. Así, el procedimiento es repetido usando ahora los valores actualizados, o sea σ^2_{n+1} , ζ^2_{n+1} y $\Delta \lambda^2$. El corrector plástico $\Delta \sigma^{pc}$ gradualmente converge al valor correcto dentro de la tolerancia adoptada. Los criterios de convergencia adoptados son definidos por las Ecuaciones 20.

$$e_{\sigma} = \|R_{\sigma}^{i+1}\| / \|\sigma^i_{n+1}\| \leq TOL \quad \text{Ec.[20a]}$$

$$e_{\zeta} = \|R_{\zeta}^{i+1}\| / \|\zeta^i_{n+1}\| \leq TOL \quad \text{Ec.[20b]}$$

$$R_{\varphi}^{i+1} = \varphi^{i+1} \leq TOL \quad \text{Ec.[20c]}$$

En que:

e_{σ} : Error en el tensor de tensiones.

e_{ζ} : Error en el tensor de variables internas.

5. INTEGRACIÓN DEL MODELO DE VON MISES

El criterio de von Mises asume que la fluencia ocurre cuando el invariante de tensiones desviadoras excede cierto valor que depende a su vez de las tensiones desviadoras. Serán presentadas dos leyes de endurecimiento. Mientras en modelos con endurecimiento isotrópico la superficie de fluencia se expande uniformemente en todas las direcciones en el

espacio de tensiones sin sufrir cambios en su forma o en su centro, para el caso de endurecimiento cinemático el centro de la superficie cambia en el proceso de carga, sin embargo su centro y tamaño permanecen iguales. El cambio en la relación tensión-deformación es dado por la Ecuación 21.

$$\dot{\sigma} = C\dot{\varepsilon}^e \quad \text{Ec.[21]}$$

En que:

$\dot{\sigma}$: Tasa del tensor de tensiones;

$\dot{\varepsilon}^e$: Tasa del tensor de deformaciones elásticas.

Son utilizadas las Ecuaciones 22 para el cálculo del primer y del segundo invariante, así como el tensor de tensiones desviadoras.

$$I = \sigma_{kl}\delta_{kl} \quad \text{Ec.[22a]}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}I\delta_{ij} \quad \text{Ec.[22b]}$$

$$J = \left(\frac{1}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2} \quad \text{Ec.[22c]}$$

En que:

I : Primer invariante del tensor de tensiones (GPa);

s_{ij} : Tensor de tensiones desviadoras (GPa);

J : Segundo invariante del tensor de tensiones.

La superficie de fluencia del criterio de von Mises, es asumida como un círculo con respecto a un punto en el plano octaédrico, representado por el tensor α y es dada por la Ecuación 23.

$$\varphi(s, \alpha) = (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad \text{Ec.[23]}$$

En que:

α_{ij} : Tensor *Back Stress* (GPa);

k : Variable de endurecimiento.

Para el modelo con endurecimiento isotrópico $\alpha = 0$, asumiendo una regla de flujo asociativa, las ecuaciones involucradas en las relaciones constitutivas plásticas son (Ecuación 24):

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}r; \dot{\lambda} = \frac{1}{K_p}r\dot{\sigma} \quad \text{Ec.[24]}$$

En que:

$\dot{\varepsilon}^p$: Tasa del tensor de deformaciones plásticas;

$\dot{\lambda}$: Índice de carga.

Uno de los principales aspectos de la teoría de plasticidad es la condición de consistencia de la función de fluencia representada matemáticamente por la Ecuación 4. Esta condición lleva a (Ecuación 25):

$$K_p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \dot{\zeta} \quad \text{Ec.[25]}$$

5.1 APLICACIÓN DEL MÉTODO CPPM AL MODELO DE VON MISES CON LEY DE ENDURECIMIENTO ISOTRÓPICO NO LINEAL

Reescribiendo la Ecuación 23, para el caso de endurecimiento isotrópico, el criterio de fluencia es definido por la Ecuación 26.

$$\varphi(s, k) = s_{ij}s_{ij} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad \text{Ec.[26]}$$

Donde la variable k , es la única variable interna en el modelo, y geoméricamente representa el tamaño de la superficie de fluencia, se tiene entonces que, para las variables internas (Ecuación 27):

$$\zeta \equiv k \quad \text{Ec.[27]}$$

La tasa de cambio de la variable de endurecimiento k definida en la Ecuación 28a.

Dependerá de una función no lineal g (Ecuación 28b.), que depende a su vez de varios parámetros del material y de la historia de la evolución de las deformaciones plásticas.

$$\dot{k} = g\dot{\xi}^p \quad \text{Ec.[28a]}$$

$$g = \frac{m(k_f - k_0)^2}{[(k_f - k_0) + m\xi^p]^2} = \frac{a_1}{[a_2 + b\xi^p]^2} \quad \text{Ec.[28b]}$$

En que:

\dot{k} : Tasa de cambio en la variable de endurecimiento;

g : Función de evolución de la variable de endurecimiento;

$\dot{\xi}^p$: Longitud de la trayectoria en el espacio de deformaciones plásticas desviadoras;

m : Parámetro de endurecimiento;

k_0 : Tensión de fluencia de un espécimen inalterado;

k_f : Tensión de ruptura.

$$a_1: m. (k_f - k_0)^2;$$

$$a_2: (k_f - k_0);$$

$$b: m..$$

La longitud de la trayectoria en el espacio de deformaciones plásticas desviadoras, definida por la Ecuación 29.

$$\xi^p = \left[\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right] \quad \text{Ec. [29]}$$

En que:

$\dot{\epsilon}_{ij}$: Tasa de cambio en la variable del tensor de deformaciones desviadoras.

La tasa de cambio del tensor de deformaciones desviadoras es calculada con la Ecuación 30.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{Ec. [30]}$$

De las relaciones definidas en la Ecuación 29. Podemos reescribir la Ecuación 31 como (Ecuación 31):

$$\xi^p = \left[\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right] = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} \dot{\lambda} = \bar{r}^d \dot{\lambda} \quad \text{Ec. [31]}$$

En que:

r_{ij}^d : Parte desviadora del vector de flujo.

$$\bar{r}^d: \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2}$$

La parte desviadora del vector de flujo r_{ij}^d , puede ser calculada con la Ecuación 32.

$$r_{ij}^d = r_{ij} - \frac{1}{3} r_{pp} \delta_{ij} \quad \text{Ec. [32]}$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se tiene que para el modelo con endurecimiento isotrópico no lineal, la tasa de cambio del tamaño de la superficie de fluencia puede ser calculada con la Ecuación 33.

$$\dot{k} = g \bar{r}^d \dot{\lambda} = \bar{g} \dot{\lambda} \quad \text{Ec. [33]}$$

En que:

\bar{g} : $g \bar{r}^d$.

Así, para actualizar las variables internas del modelo en el nuevo paso de carga, definidas por la Ecuación 9. La función de endurecimiento \hat{s} es un escalar dado por la Ecuación 34.

$$\hat{s} = \bar{g} \quad \text{Ec. [34]}$$

Ahora, para la implementación del método, deben ser calculados los gradientes de la

función de fluencia respecto a las variables de estado. Derivando la Ecuación 22b respecto al tensor de tensiones, se tiene que (Ecuación 35):

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kj} \quad \text{Ec. [35]}$$

La derivada de la función de fluencia definida (Ecuación 26) respecto al tensor de tensiones desviadoras es calculada por la Ecuación 36.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_{kl}} = 2 \delta_{ik} \delta_{jl} s_{ij} = 2 s_{kl} \quad \text{Ec. [36]}$$

Usando la regla de la cadena y las dos ecuaciones anteriores, el vector de flujo plástico es definido por la Ecuación 37.

$$r_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = 2 s_{kl} \left(\delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kj} \right) = 2 s_{ij} (s_{kk} = 0) \quad \text{Ec. [37]}$$

Se puede observar de la ecuación anterior que el vector de flujo plástico r_{ij} es puramente desviador, es decir, su parte volumétrica es igual a cero ($r_{ij}^d = r_{ij}$). Ahora, de las Ecuaciones 22c y 37. Tenemos que (Ecuación 38):

$$\begin{aligned} \bar{r}^d &= \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2} r_{ij} r_{ij} \right]^{1/2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right]^{1/2} = 2J \end{aligned} \quad \text{Ec. [38]}$$

La derivada de la función de fluencia respecto a k es definida por la Ecuación 39.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k} = -\frac{4}{3} k \quad \text{Ec. [39]}$$

De las Ecuaciones 34 y 39. El modulo plástico es calculado por la siguiente expresión (Ecuación 40):

$$K_p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \hat{s} = \frac{4}{3} k g \bar{r}^d \quad \text{Ec. [40]}$$

La integración del modelo constitutivo puede ser realizada o en el espacio de tensiones σ , o en el espacio de tensiones desviadoras s . En el modelo de von Mises, por tratarse de un modelo simple, puede ser utilizado el espacio de tensiones desviadoras, disminuyendo considerablemente el consumo computacional. En la implementación realizada el usuario puede escoger en que campo de tensiones prefiere integrar el modelo constitutivo.

5.1.1 Formulación en el espacio de tensiones σ

Las ecuaciones principales *Backward Euler* son definidas por las Ecuaciones 41.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda C r^{n+1}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) \quad \text{Ec. [41a]}$$

$$k_{n+1} = \bar{k}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}, \Delta\lambda) \quad \text{Ec. [41b]}$$

$$\varphi^{n+1}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) = 0 \quad \text{Ec. [41c]}$$

La evolución de la variable interna es determinada por medio de las aproximaciones 1 y 2, determinadas por las Ecuaciones 42a y 42b respectivamente.

$$\bar{k} = k_n + \Delta\lambda \bar{g}^{n+1}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) \quad \text{Ec. [42a]}$$

$$\bar{k} = k_0 + \frac{m(k_f - k_0)\xi^p}{(k_f - k_0) + m\xi^p} \quad \text{Ec. [42b]}$$

En que:

k_n : Valor de la variable en el paso de carga n ;

k_{n+1} : Valor de la variable en el paso de carga $n+1$.

Discretizando la Ecuación 31 (Ecuación 43).

$$p_{n+1} = \xi^p_n + \Delta\xi; \Delta\xi = \bar{r}^d_{n+1}\Delta\lambda \quad \text{Ec. [43]}$$

Los coeficientes de las Ecuaciones 18 para el modelo de von Mises con endurecimiento isotrópico son evaluados a seguir en el estado actual de tensiones $n+1$, para simplificar la notación el subíndice es dejado atrás, es decir $\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}$. La derivada del tensor constitutivo en relación al tensor de tensiones es calculada en la Ecuación 44.

$$\frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \sigma_{kl}} = 0; \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = 2 \frac{\partial s_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = 2 \left(\delta_{pk}\delta_{ql} - \frac{1}{3}\delta_{pq}\delta_{kl} \right) \quad \text{Ec. [44]}$$

Las expresiones para la Aproximación 1 son dadas por las Ecuaciones 45.

$$g^{n+1} = \frac{m(k_f - k_0)^2}{[(k_f - k_0) + m\xi^p]^2} = \frac{a_1}{[a_2 + b\xi^p]^2} = \frac{a_1}{(a_2 + b\xi^p_n + b\bar{r}^d_{n+1}\Delta\lambda)^2} \quad \text{Ec. [45a]}$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = \bar{r}^d_{n+1} \frac{\partial g^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} + g^{n+1} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{Ec. [45b]}$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial k} = \bar{r}^d_{n+1} \frac{\partial g^{n+1}}{\partial k} + g^{n+1} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial k} \quad \text{Ec. [45c]}$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = \bar{r}^d_{n+1} \frac{\partial g^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} + g^{n+1} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \quad \text{Ec. [45d]}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{1}{2\bar{r}^d_{n+1}} \frac{2}{2} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} r_{ij} \\ &= \frac{1}{2\bar{r}^d_{n+1}} 2r_{ij} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) = \frac{1}{\bar{r}^d_{n+1}} r_{kl} \end{aligned} \quad \text{Ec. [45e]}$$

$$\frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial k} = 0 \quad \text{Ec. [45f]}$$

$$\frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = 0 \quad \text{Ec. [45g]}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} &= - \frac{2a_1 b \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_n + b\bar{r}^d_{n+1}\Delta\lambda)^3} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \\ &= - \frac{2a_1 b \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \frac{r_{kl}}{\bar{r}^d_{n+1}} \end{aligned} \quad \text{Ec. [45h]}$$

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial k} = 0 \quad \text{Ec. [45i]}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} &= - \frac{2a_1 b \bar{r}^d_{n+1}}{(a_2 + b\xi^p_n + b\bar{r}^d_{n+1}\Delta\lambda)^3} \\ &= - \frac{2a_1 b \bar{r}^d_{n+1}}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \end{aligned} \quad \text{Ec. [45j]}$$

Así, los gradientes para la función de endurecimiento en el paso $n+1$ pueden ser calculados como (Ecuaciones 46):

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = \left[\frac{g^{n+1}}{\bar{r}^d_{n+1}} - \frac{2a_1 b \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \right] r_{kl} \quad \text{Ec. [46a]}$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial k} = 0 \quad \text{Ec. [46b]}$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = - \frac{2a_1 b (\bar{r}^d_{n+1})^2}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \quad \text{Ec. [46c]}$$

Para la Aproximación 2 se tienen las Ecuaciones 47.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{m(k_f - k_0)}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \left[\Delta\lambda (a_2 + b\xi^p_{n+1}) \right. \\ &\quad \left. - m\Delta\lambda \xi^p_{n+1} \right] \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \\ &= \frac{a_1 \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \\ &= \frac{a_1 \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \frac{r_{kl}}{\bar{r}^d_{n+1}} \end{aligned} \quad \text{Ec. [47a]}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial k} = \frac{m(k_f - k_0)}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} [\Delta\lambda(a_2 + b\xi^p_{n+1}) - m\Delta\lambda\xi^p_{n+1}] \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial k} \quad \text{Ec. [47b]}$$

$$= \frac{a_1\Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial k}$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial \Delta\lambda} = \frac{m(k_f - k_0)}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} [(a_2 + b\xi^p_{n+1}) - m\xi^p_{n+1}] \bar{r}^d_{n+1} \quad \text{Ec. [47c]}$$

$$= \frac{a_1}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \bar{r}^d_{n+1}$$

Así los coeficientes de ecuaciones residuales del modelo de von Mises con una regla de endurecimiento isotópico no lineal son definidas por las Ecuaciones 48.

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \Delta\lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{Ec. [48a]}$$

$$= \delta_{ik}\delta_{jl} + 2\Delta\lambda(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{4}{3}G\delta_{ij}\delta_{kl}\Delta\lambda$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta} = \Delta\lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \zeta} = \Delta\lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial k} = \quad \text{Ec. [48b]}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta\lambda} = C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} \quad \text{Ec. [48c]}$$

$$= \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right] 2s_{pq}$$

$$= 4Gs_{ij}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = r_{kl} = 2s_{kl} \quad \text{Ec. [48d]}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial k} = -\frac{4}{3}k \quad \text{Ec. [48e]}$$

Las demás expresiones dependen del tipo de aproximación de la variable de endurecimiento.

Aproximación 1 (Ecuaciones 49):

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta\lambda \frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{Ec. [49a]}$$

$$= -\Delta\lambda \left[\frac{g^{n+1}}{\bar{r}^d_{n+1}} - \frac{2a_1b\Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \right] r_{kl}$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \zeta} = 1 - \frac{\partial \bar{k}}{\partial k} = 1 - \Delta\lambda \frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial k} = 1 \quad \text{Ec. [49b]}$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \Delta\lambda} = -\bar{g}^{n+1} - \Delta\lambda \frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} \quad \text{Ec. [49c]}$$

$$= -\bar{g}^{n+1} + \Delta\lambda \frac{2a_1b(\bar{r}^d_{n+1})^2}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3}$$

Aproximación 2 Ecuaciones (50):

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{a_1\Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \frac{r_{kl}}{\bar{r}^d_{n+1}} \quad \text{Ec. [50a]}$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \zeta} = 1 - \frac{\partial \bar{k}}{\partial k} = 1 - \frac{a_1\Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \frac{\partial \bar{r}^d_{n+1}}{\partial k} \quad \text{Ec. [50b]}$$

$$= 1$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{a_1}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^2} \bar{r}^d_{n+1} \quad \text{Ec. [50c]}$$

5.1.2 Formulación en el espacio de tensiones desviadoras s

Para modelos simples (como el modelo de von Mises con reglas simples de endurecimiento), es posible combinar las ecuaciones anteriores en una simple ecuación escalar en $\Delta\lambda$, resolviendo esta ecuación y encontrando los valores de tensiones y de variables internas en el incremento $n+1$. Este es el caso para endurecimiento isotrópico no lineal cuando las ecuaciones son basadas en el campo de tensiones desviadoras. Las ecuaciones de Euler para tensiones desviadoras pueden ser descompuestas en parte esférica y desviadora (Ecuaciones 51):

$$p_{n+1} = p_n + K\Delta\varepsilon_{pp} - K\Delta\lambda r_{pp}^{n+1} \quad \text{Ec. [51a]}$$

$$s_{n+1} = s_n + 2G\Delta e - 2G\Delta\lambda r^d_{n+1} \quad \text{Ec. [51b]}$$

En que:

$p_{n+1} = \sigma_{kk}$: Parte esférica de σ_{n+1} ;

s_{n+1} : Tensiones desviadoras en el paso de carga $n+1$;

$\Delta e = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{pp}$ δ : Incremento desviador de la deformación.

Como ya fue mencionado anteriormente, en modelos independientes de la presión hidrostática, como el modelo de von Mises considerado en este trabajo, $r_{pp}^{n+1} = 0$, la variación de p es puramente elástica. Para el cálculo de la variable de endurecimiento k , son utilizadas las dos aproximaciones definidas en la sección anterior por las Ecuaciones 42.

Aproximación 1: Es utilizada la descomposición aditiva de las deformaciones, es decir que la deformación total es calculada como la suma de la deformación elástica y la deformación plástica. Así (Ecuación 52):

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + 2G(\Delta e - \Delta e^p) = s^{tr} - 2G\Delta\lambda r_{n+1} \\ &= s^{tr} - 4G\Delta\lambda s_{n+1} \\ &= \frac{1}{1 + 4G\Delta\lambda} s^{tr} = \frac{s^{tr}}{x_0} \end{aligned} \quad \text{Ec.}[52]$$

En que:

$$x_0: 1 + 4G \Delta\lambda$$

De la ecuación anterior se sigue que la actualización del segundo invariante puede ser calculada con la Ecuación 53.

$$J_{n+1} = \frac{J^{tr}}{x_0} \quad \text{Ec.}[53]$$

En que:

$$\begin{aligned} J_{n+1}: &\left(\frac{1}{2} s_{n+1} : s_{n+1}\right)^{1/2}; \\ J^{tr}: &\left(\frac{1}{2} s^{tr} : s^{tr}\right)^{1/2}; \end{aligned}$$

Notando que x_0 es un valor escalar, lo cual implica que s_{n+1} y s^{tr} son colineales. Usando la Ecuación 42a la variable de endurecimiento puede ser expresada como (Ecuación 54):

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= k_n + \Delta\lambda \bar{r}_{n+1}^d g_{n+1} = k_n + 2\Delta\lambda J_{n+1} g_{n+1} \\ &= k_n + \frac{2\Delta\lambda J^{tr} g_{n+1}}{x_0} \end{aligned} \quad \text{Ec.}[54]$$

La función de endurecimiento definida en la Ecuación 45a puede ser ahora expresada por la Ecuación 55.

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \frac{a_1}{(a_2 + b\xi_n^p + b\Delta\lambda \bar{r}_{n+1}^d)^2} \\ &= \frac{a_1}{(a_2 + b\xi_n^p + 2b\Delta\lambda J_{n+1})^2} \\ &= \frac{a_1}{(a_2 + b\xi_n^p + 2b\Delta\lambda \frac{J^{tr}}{x_0})^2} \\ &= \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} \end{aligned} \quad \text{Ec.}[55]$$

Así, la Ecuación 54 resulta en la Ecuación 56.

$$k_{n+1} = k_n + \frac{2\Delta\lambda J^{tr}}{x_0} \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})} \quad \text{Ec.}[56]$$

Combinando las Ecuaciones 52 y 56, en el criterio de fluencia definido por la Ecuación 26, podemos llegar a la Ecuación 57.

$$J_{n+1} - \frac{k_{n+1}}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{J^{tr}}{x_0} - \frac{k_n}{\sqrt{3}} \\ - \frac{2\Delta\lambda J^{tr}}{\sqrt{3}x_0} \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} = 0 \\ J^{tr}\sqrt{3} - k_n x_0 \\ - 2\Delta\lambda J^{tr} \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec.}[57]$$

$$\begin{aligned} J^{tr}\sqrt{3} - k_n(1 + 4G\Delta\lambda) \\ - 2\Delta\lambda J^{tr} \frac{a_1(1 + 4G\Delta\lambda)^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p(1 + 4G\Delta\lambda) + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^{tr}\sqrt{3} - k_n(1 + 4G\Delta\lambda) \\ - 2\Delta\lambda J^{tr} a_1 \frac{(1 + 8G\Delta\lambda + 16G^2\Delta\lambda^2)}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p(1 + 4G\Delta\lambda) + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} \\ = 0 \end{aligned}$$

Con algunas operaciones podemos escribir nuevamente la ecuación anterior como la Ecuación 58.

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2\Delta\lambda)(\beta_1 + \beta_2\Delta\lambda) \\ = 2\Delta\lambda J^{tr} a_1(1 + 16G^2\Delta\lambda^2 \\ + 8G\Delta\lambda) \end{aligned} \quad \text{Ec.}[58]$$

En que:

$$\begin{aligned} \alpha_1: &J^{tr}\sqrt{3} - k_n; \\ \alpha_2: &-4Gk_n; \\ \beta_1: &a_2 + b\xi_n^p; \\ \beta_2: &4Ga_2 + 4Gb\xi_n^p + 2bJ^{tr}. \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior se tiene la siguiente ecuación cúbica en $\Delta\lambda$ (Ecuación 59):

$$B_1\Delta\lambda^3 + B_2\Delta\lambda^2 + B_3\Delta\lambda + B_4 = 0 \quad \text{Ec.}[59]$$

En que:

$$\begin{aligned} B_1: &\alpha_2\beta_2^2 - 32G^2J^{tr}a_1; \\ B_2: &2\beta_1\beta_2\alpha_2 + \alpha_1\beta_2^2 - 16GJ^{tr}a_1; \\ B_3: &\alpha_2\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2\alpha_1 - 2J^{tr}a_1; \\ B_4: &\alpha_1\beta_1^2. \end{aligned}$$

Aproximación 2: Las expresiones para las cantidades s_{n+1} , s^{tr} y x_0 son definidas como en la Aproximación 1. Ahora, para la variable de endurecimiento k , se tiene que (Ecuación 60):

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= k_0 + \frac{m(k_f - k_0)[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d\Delta\lambda]}{(k_f - k_0) + m[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d\Delta\lambda]} \\ &= k_0 \\ &\quad + \frac{c_1[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d\Delta\lambda]}{a_2 + b[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d\Delta\lambda]} \end{aligned} \quad \text{Ec.}[60]$$

En que:

$$\begin{aligned} c_1: &m(k_f - k_0); \\ a_2: &k_f - k_0. \end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación 59 en el criterio de von Mises podemos obtener la Ecuación 61.

$$\frac{J^{tr}}{x_0} \sqrt{3} = k_0 + \frac{c_1 [\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta \lambda]}{a_2 + b [\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta \lambda]} \quad \text{Ec. [61]}$$

Reorganizando la ecuación anterior y utilizando la Ecuación 38 tenemos que (Ecuación 62):

$$(J^{tr} \sqrt{3} - k_0 x_0) (a_2 x_0 + b x_0 \xi_n^p + b 2 J^{tr} \Delta \lambda) = x_0 (c_1 \xi_n^p x_0 + 2 c_1 J^{tr} \Delta \lambda) \quad \text{Ec. [62]}$$

Reemplazando la Ecuación 52 en la ecuación anterior (Ecuación 63):

$$(J^{tr} \sqrt{3} - k_0 - 4 G \Delta \lambda k_0) (a_2 + b \xi_n^p + 4 G \Delta \lambda a_2 + 4 G \Delta \lambda b \xi_n^p + b 2 J^{tr} \Delta \lambda) = (1 + 4 G \Delta \lambda) (c_1 \xi_n^p + 4 G \Delta \lambda c_1 \xi_n^p + 2 c_1 J^{tr} \Delta \lambda) \quad \text{Ec. [63]}$$

De forma análoga al caso de la Aproximación 1, desarrollando la ecuación anterior es encontrada una expresión cuadrática en $\Delta \lambda$, dada por (Ecuación 64):

$$B_1 \Delta \lambda^2 + B_2 \Delta \lambda + B_3 = 0 \quad \text{Ec. [64]}$$

En que:

$$B_1: -8 G k_0 (2 G a_2 + 2 G b \xi_n^p + J^{tr} b) - 8 G c_1 (2 G \xi_n^p + J^{tr});$$

$$B_2: -4 G k_0 (a_2 + b \xi_n^p) + 2 (J^{tr} \sqrt{3} - k_0) (2 G a_2 + G b \xi_n^p + J^{tr} b) - 8 c_1 G \xi_n^p - 2 c_1 J^{tr};$$

$$B_3: (J^{tr} \sqrt{3} - k_0) (a_2 + b \xi_n^p) - c_1 \xi_n^p.$$

5.2 APLICACIÓN DEL MÉTODO CPPM AL MODELO DE VON MISES CON ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO.

Generalmente, para modelar este tipo de comportamiento, es introducida una variable interna tensorial conocida como *back stress* y es definida una regla de evolución adecuada para este tensor. En modelos como el de von Mises donde el criterio de fluencia es independiente de la presión hidrostática, el tensor *back stress* también es independiente de la presión hidrostática. El modelo es ampliamente utilizado en plasticidad independiente de la tasa y para reglas de flujo asociativas. La regla de endurecimiento es no lineal y en este trabajo es aplicada en el campo de tensiones desviadoras. Para modelos con endurecimiento cinemático, la cantidad k del

criterio von Mises es asumida constante en el modelo y geoméricamente representa el tamaño de la superficie de fluencia. Así, la variable interna del modelo es el tensor *back stress* α (Ecuación 65):

$$\zeta \equiv \alpha \quad \text{Ec. [65]}$$

Es utilizada de nuevo la regla de la cadena para el cálculo del vector de flujo plástico en las Ecuaciones 66.

$$r_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{Ec. [66a]}$$

$$= 2 (s_{kl} - \alpha_{kl}) \left(\delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) = 2 (s_{ij} - \alpha_{ij}) \quad \text{Ec. [66a]}$$

$$= 2 b_{ij} \quad \text{Ec. [66b]}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{ij}} = -2 b_{ij} \quad \text{Ec. [66b]}$$

$$b_{ij} = (s_{ij} - \alpha_{ij}) \quad \text{Ec. [66c]}$$

El comportamiento de la ley de endurecimiento cinemático es modelado usando la regla de Armstrong-Frederick (Armstrong-Frederick, 1966) dada por la Ecuación 67.

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}_{ij}^p - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \alpha_{ij} \dot{\epsilon}^p \quad \text{Ec. [67]}$$

En que:

α_{ij} : Tasa de cambio del tensor de endurecimiento; c y γ : Parámetros del material.

Reemplazando las Ecuaciones 31, 66 y 67 en el criterio de fluencia definido en la Ecuación 26, se tiene la Ecuación 68.

$$\bar{r}^d = \frac{2}{\sqrt{3}} k \quad \text{Ec. [68]}$$

Definimos el tensor \bar{s}_{ij} en la Ecuación 69.

$$\bar{s}_{ij} = \frac{2}{3} c r_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \alpha_{ij} \bar{r}^d = \frac{4}{3} c b_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \alpha_{ij} \bar{r}^d \quad \text{Ec. [69]}$$

En que:

$$b_{ij}: s_{ij} - r_{ij}.$$

Así, la Ecuación 67 puede ser expresada de la siguiente forma (Ecuación 70):

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\lambda} \bar{s}_{ij} \quad \text{Ec. [70]}$$

Utilizando la condición de consistencia de la superficie de fluencia, definida en la Ecuación 4, podemos llegar a: la Ecuación 71.

$$K_p = \frac{8}{9} k (2 c k - 3 \gamma k a) \quad \text{Ec. [71]}$$

En que:

$$a: (s_{kl} - \alpha_{kl})\alpha_{kl}.$$

Utilizando las ecuaciones anteriores y dado que el tensor de flujo plástico es puramente desviador, ($r_{pp} = 0$), se tiene que (Ecuación 72):

$$C_{ijkl}r_{kl} = 4G(s_{ij} - \alpha_{ij}) = 4Gb_{ij} \quad \text{Ec. [72]}$$

De nuevo cuando es implementado el método en el espacio de tensiones desviadoras, las ecuaciones de Euler para tensiones pueden ser descompuestas en partes esférica y desviadora como en las Ecuaciones 72 y 73.

$$p_{n+1} = p_n + K\Delta\varepsilon_{pp} \quad \text{Ec. [72]}$$

$$s_{n+1} = s_n + 2G\Delta e - 2G\Delta\lambda r_{n+1} = s^{tr} - 2G\Delta\lambda r_{n+1} \quad \text{Ec. [73]}$$

La ecuación *backward Euler* para el tensor *back stress* es:

$$\alpha_{ij}^{n+1} = \alpha_{ij}^n + \frac{2}{3}c\Delta\lambda r_{ij}^{n+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma\Delta\lambda \bar{r}^d \alpha_{ij}^{n+1} \quad \text{Ec. [74]}$$

El método puede ser simplificado a una simple ecuación escalar en $\Delta\lambda$, resultando en un proceso computacionalmente muy eficiente. Haciendo uso de las Ecuaciones 66 y 68, las Ecuaciones 73 y 74 son expresadas como (Ecuaciones 75 y 76):

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{n+1} &= \alpha_{ij}^n + \frac{4}{3}c\Delta\lambda(s_{ij}^{n+1} - \alpha_{ij}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma\Delta\lambda\left(\frac{2}{\sqrt{3}}k\right)\alpha_{ij}^{n+1} \\ &= \frac{1}{y_0}\left[\alpha_{ij}^n + \frac{4c\Delta\lambda}{3}s_{ij}^{n+1}\right] \end{aligned} \quad \text{Ec. [75]}$$

$$\begin{aligned} s_{ij}^{n+1} &= s_{ij}^{tr} - 4G\Delta\lambda(s_{ij}^{n+1} - \alpha_{ij}^{n+1}) \\ &= s_{ij}^{tr} - 4G\Delta\lambda s_{ij}^{n+1} \\ &\quad + \frac{4G\Delta\lambda}{y_0}\left[\alpha_{ij}^n + \frac{4c\Delta\lambda}{3}s_{ij}^{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{x_0}\left[s_{ij}^{tr} + \frac{4G\Delta\lambda}{y_0}\alpha_{ij}^n\right] \end{aligned} \quad \text{Ec. [76]}$$

En que:

$$y_0: 1 + \frac{4c\Delta\lambda}{3} + \frac{4k\gamma\Delta\lambda}{3};$$

$$x_0: 1 + 4G\Delta\lambda - \frac{16Gc\Delta\lambda^2}{3y_0}.$$

Utilizando las ecuaciones anteriores, la

expresión para b_{ij} , puede ser definida por la Ecuación 77.

$$\begin{aligned} b_{ij}^{n+1} &= (s_{ij}^{n+1} - \alpha_{ij}^{n+1}) \\ &= s_{ij}^{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{y_0}\left[\alpha_{ij}^n + \frac{4c\Delta\lambda}{3}s_{ij}^{n+1}\right] \\ &= \left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right]s_{ij}^{n+1} - \frac{1}{y_0}\alpha_{ij}^n \\ &= \frac{1}{x_0}\left[s_{ij}^{tr} + \frac{4G\Delta\lambda}{y_0}\alpha_{ij}^n\right] \left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right] - \frac{1}{y_0}\alpha_{ij}^n \\ &= a_1s_{ij}^{tr} + a_2\alpha_{ij}^n \end{aligned} \quad \text{Ec. [77]}$$

En que:

$$a_1: \frac{1}{x_0}\left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right];$$

$$a_2: \frac{4G\Delta\lambda}{x_0y_0}\left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right] - \frac{1}{y_0}.$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones anteriores en el criterio de fluencia, se puede llegar a (Ecuación 78):

$$\begin{aligned} \varphi &= b_{ij}^{n+1}b_{ij}^{n+1} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \\ \varphi &= (a_1s_{ij}^{tr} + a_2\alpha_{ij}^n)(a_1s_{ij}^{tr} + a_2\alpha_{ij}^n) \\ &\quad - \frac{2}{3}k^2 = 0 \\ 2a_1^2J_{tr}^2 + 2a_2^2J_{\alpha}^2 + 2a_1a_2J_{\alpha s} - \frac{2}{3}k^2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. [78]}$$

En que:

$$J_{\alpha}: \left(\frac{1}{2}\alpha_{ij}^n\alpha_{ij}^n\right)^{1/2};$$

$$J_{\alpha s}: s_{ij}^{tr}\alpha_{ij}^n.$$

Las cantidades anteriores dependen únicamente de los valores en el paso de carga n , los cuales son conocidos. Así, la Ecuación 78 depende únicamente del multiplicador plástico, por lo que es una ecuación no lineal en $\Delta\lambda$, que puede ser solucionada por algún método conveniente, como el método de Newton. Una vez $\Delta\lambda$ es calculado, es utilizado para calcular α_{ij}^{n+1} y s_{ij}^{n+1} usando las Ecuaciones 75 y 76 respectivamente.

6 EJEMPLOS NUMÉRICOS.

6.1 MODELO CON ENDURECIMIENTO ISOTRÓPICO

Es presentado un ejemplo numérico para ambos espacios de integración. Es utilizada una

regla de endurecimiento isotrópico no lineal, la variable de endurecimiento k es calculada por medio de las dos aproximaciones descritas. El ejemplo es desarrollado en el espacio de tensiones principales. Los parámetros del modelo (para tensiones, tensión de fluencia y módulos, es utilizada la unidad Gpa) son:

$$k_0 = 0.25, k_f = 0.4, m = 20, E = 200, \nu = 0.3, a_1 = 0.45, a_2 = 0.15, b = 20.$$

$$\text{TOL} = 1e-10$$

Tensor elástico constitutivo, de la Ecuación 11:

$$C = \begin{bmatrix} 269.2308 & 115.3846 & 115.3846 \\ 115.3846 & 69.2308 & 115.3846 \\ 115.3846 & 115.3846 & 69.2308 \end{bmatrix}$$

Las variables de estado de tensiones para un tiempo n son:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{0.1 \quad 0.05 \quad 0.075\}, k_n = 0.25, \\ \Delta \varepsilon &= \{0.03 \quad -0.028 \quad 0.01\}, \xi_n = 0, \\ p_n &= 0.0750, s_n = \{0.0250 \quad -0.0250 \quad 0\}, J_n = 0.0250. \end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación 23 se obtiene el valor de la función de fluencia para el paso de carga n : $\varphi^n = -0.0404$. Para el estado de tensión inicial se tiene que $\varphi^n < 0$, lo que representa un comportamiento elástico. En seguida es aplicado el incremento adoptado de deformación $\Delta \varepsilon$. Las propiedades del predictor elástico son:

$$\begin{aligned} \sigma^{tr} &= \{6.1000 \quad -2.8731 \quad 2.9981\}, \\ \varphi^{tr} &= 41.4945, J^{tr} = 4.5572, \\ s^{tr} &= \{4.0250 \quad -4.9481 \quad 0.9231\} \end{aligned}$$

Lo que resulta en un comportamiento elastoplástico. El valor del predictor elástico será la primera estimación del estado de tensiones, es decir $\sigma^{tr} = \sigma_{n+1}$

$$r_{n+1} = 2s_{n+1} = \{8.0500 \quad -9.8962 \quad 1.8462\}$$

6.1.1 Formulación en el espacio de tensiones σ .

Utilizando el procedimiento descrito en 4.1.1, es realizado un proceso iterativo utilizando el método CPPM para encontrar los valores de las variables de estado en el paso $n+1$. En las Tablas 2 y 3 pueden ser observados los resultados para las tensiones y para las variables internas para un paso de carga. Son utilizadas las dos aproximaciones descritas en capítulos anteriores. Los resultados son básicamente iguales, con una pequeña diferencia que puede ser despreciable. Las dos aproximaciones entonces pueden ser aplicadas en

un programa con elementos finitos. Enseguida, en la Ilustración 1, se presenta la convergencia del método para cada uno de los criterios determinados por las Ecuaciones 20. Se puede apreciar que hasta alcanzar los criterios, la convergencia es cuadrática.

6.1.2 Formulación en el espacio de tensiones s .

Siguiendo el procedimiento descrito en 4.1.2, es utilizado el método CPPM para encontrar los valores de las variables de estado en el paso $n+1$. Se puede observar que la formulación en el espacio de tensiones σ envuelve significativamente más cálculos que la formulación en el espacio de tensiones desviadoras s . No obstante, los resultados son fundamentalmente los mismos, con una pequeña tolerancia. En la Ilustración 2 se puede observar

la trayectoria tensión-deformación para un único punto, aplicando el modelo de endurecimiento isotrópico no lineal descrito.

6.2 MODELO CON ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO

En esta sección, utilizando el método de proyección al punto más próximo CPPM, son obtenidas las relaciones tensión-deformación para un ciclo de carga. El método representa satisfactoriamente las variables internas para una carga cíclica. Los parámetros del modelo están listados en la Tabla 1, según Armstrong-Frederick (1966) para un elemento sobre carga uniaxial la tensión de ruptura es dada por la Ecuación 79.

$$\sigma_f = k + \frac{c}{\gamma} \quad \text{Ec. [79]}$$

TABLA 1: Propiedades mecánicas.

E (GPa)	ν	k (GPa)	c (GPa)	γ	σ_f (GPa)
200	0.3	0.1	30	100	0.4
200	0.3	0.1	3	10	0.4

En la Ilustración 3 se puede observar el comportamiento aplicando incrementos uniaxiales en el tensor de deformación. Como es de esperar para los dos modelos implementados, la tensión de ruptura alcanzada es el mismo valor al utilizar la

TABLA 2: Resultados del proceso iterativo para la Aproximación 1.

Iteración	σ_{n+1}	k_{n+1}	$e\sigma$	$e\zeta$	$E\phi$	$\delta\lambda$
1	{4,0943 -0,4074 2,5381}	0,2835	0,3310	0,0141	10,4006	0,0016
2	{3,0900 0,8272 2,3078}	0,2880	0,5056	0,0110	2,5860	0,0140
3	{2,5922 1,4392 2,1936}	0,2756	0,5554	0,0243	0,6352	0,0300
4	{2,3525 1,7339 2,1386}	0,2741	0,5230	0,0234	0,1473	0,0563
5	{2,2489 1,8612 2,1149}	0,2739	0,3721	0,0161	0,0275	0,0825
6	{2,2182 1,8990 2,1078}	0,2743	0,1099	0,0050	0,0024	0,0900
7	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	0,0032	0,0002	2,46E-05	0,0901
8	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	4,39E-07	1,05E-07	1,60E-10	0,0901
9	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	2,57E-14	1,01E-15	6,94E-18	0,0901

utilizar la Ecuación 93. Se observa también que cuanto mayor es el parámetro γ el comportamiento es más rígido. De modo similar, en la Ilustración 4 se observa la trayectoria tensión – deformación para un elemento sometido en este

caso a una carga cíclica de carga y descarga para los dos modelos de la Tabla 1. Es importante resaltar que mediante el uso de la regla de endurecimiento no lineal pueden ser simulados modelos histeréticos.

TABLA 3: Resultados del proceso iterativo para la Aproximación 2.

Iteración	Aproximación 2					
	σ_{n+1}	k_{n+1}	$e\sigma$	$e\zeta$	$e\phi$	$\delta\lambda$
1	{4,0943 -0,4074 2,5381}	0,3495	0,3310	0,0714	10,4006	0,0016
2	{3,0947 0,8214 2,3089}	0,3990	0,5014	0,2863	2,5860	0,0140
3	{2,5926 1,4387 2,1937}	0,2756	0,5578	0,0245	0,6352	0,0300
4	{2,3527 1,7336 2,1387}	0,2741	0,5237	0,0235	0,1473	0,0563
5	{2,2490 1,8611 2,1149}	0,2739	0,3725	0,0161	0,0275	0,0825
6	{2,2182 1,8989 2,1078}	0,2743	0,1102	0,0050	0,0024	0,0900
7	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	0,0032	0,0002	2,46E-05	0,0901
8	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	4,46E-07	1,06E-07	1,60E-10	0,0901
9	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	3,39E-14	1,01E-15	6,94E-18	0,0901

TABLA 3: Resultados para el método con tensiones desviadoras.

	Aproximación 1	Aproximación 2
x_0	28,7349	21,4188
σ_{n+1}	{2,2151 1,9028 2,1071}	{2,2629 1,8439 2,1181}
J_{n+1}	0,1586	0,2128
ξ_{n+1}^p	0,0286	0,0282
g_{n+1}	0,8637	--
k_{n+1}	0,2747	0,3685

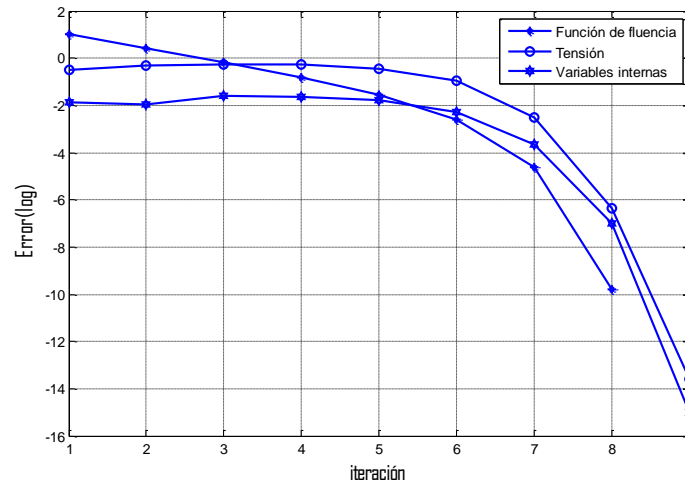


ILUSTRACIÓN 1: Convergencia del método.

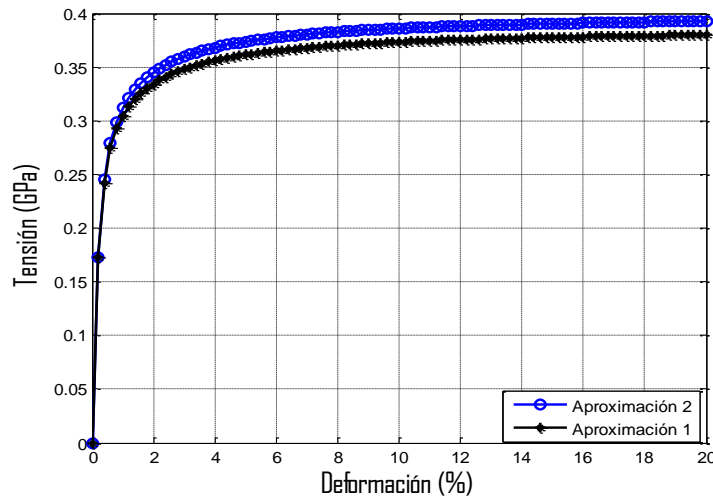


ILUSTRACIÓN 2: Tensión-Deformación para un cuerpo sometido a carga uniaxial.

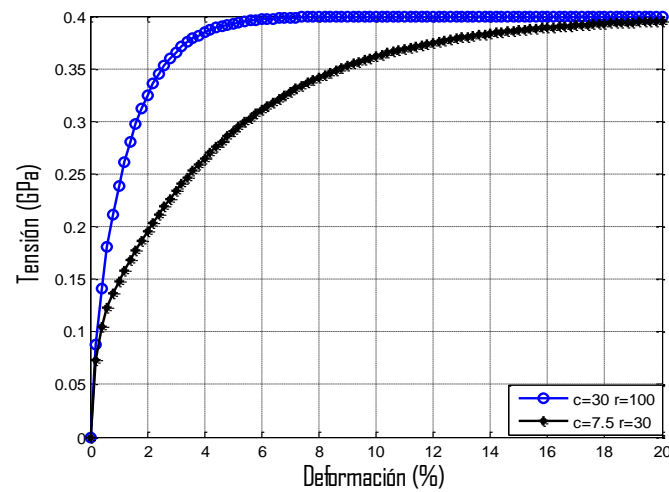


ILUSTRACIÓN 3: Comportamiento de un elemento sometido a carga uniaxial.

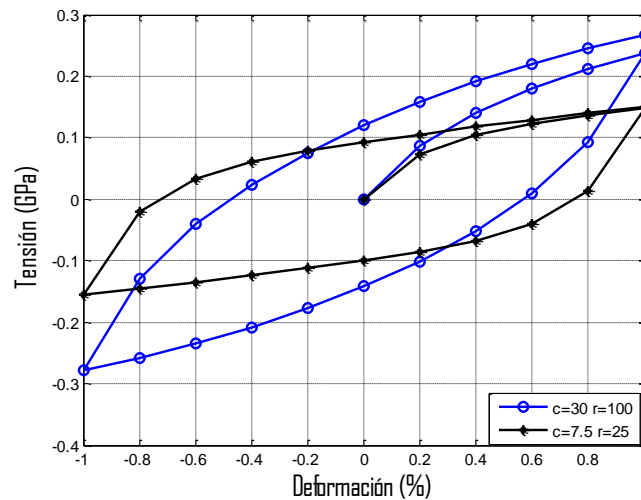


ILUSTRACIÓN 4: Comportamiento de un elemento sometido a carga cíclica.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo fue presentado el modelo constitutivo de von Mises para un problema con solo un elemento y la formulación analítica para su integración empleando diferentes leyes no lineales de endurecimiento de la función de fluencia. La rutina resultante de este trabajo presenta un comportamiento robusto en términos de implementación numérica y económica computacionalmente, que será implementado posteriormente en análisis con elementos finitos.

El método CPPM está basado en el esquema iterativo de Newton y sufre los inconvenientes inherentes del método. Por ejemplo, el método converge solo cuando la estimación inicial está cerca de la solución. Esto varía dependiendo del grado de no linealidad de la regla de endurecimiento, del criterio de endurecimiento, entre otros. Puede existir entonces no convergencia en diferentes casos: Cuando el tensor de tensiones de prueba está muy alejado de la solución, por ejemplo en modelos que combinan endurecimiento y ablandamiento. En algunos casos, el cambio en variables internas durante iteraciones a nivel local puede ser muy grande, resultando en divergencia. Pueden aparecer también dificultades de convergencia cuando la solución final cae cerca de "esquinas" en las superficies de fluencia o de potencial plástico. La satisfacción de la condición de consistencia de la

función de fluencia mejora la precisión del método. Así, la precisión del método depende del tamaño de cada incremento.

Se puede concluir que para análisis con elementos finitos resultará más conveniente computacionalmente el uso del espacio de tensiones desviadoras, siempre que sea posible, pues existen modelos constitutivos donde será necesario el uso de la formulación en el espacio de tensiones. El trabajo presenta toda la formulación analítica del CPPM la cual es difícil de encontrar en la literatura de una manera simple y con una notación que no sea muy pesada para el lector.

8. REFERENCIAS

- Anandarajah, A.2010. **Computational Methods in Elasticity and Plasticity**, pp. 375-412. Springer New York.
- Armstrong, P.J., & Frederick, C.O. 1966. **A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect**. G.E.G.B. Report RD|B|N 731.
- Armero, F. & Pérez-Foguet, A. 2002. **On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity- Part I: The variational structure**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. pp. 297-329.
- Borst, R. & Heeres, O. 2002. **A unified approach to the implicit integration of standard, non-standard and viscous plasticity models**. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. pp 1059-1070, vol. 26.
- Crisfield, M.A. 1991. **Nonlinear Finite Analysis of Solid and Structures: Vol. 1: Essentials**, Wiley, New York.

Kojic, M. **The governing parameter method for implicit integration of viscoplastic constitutive relations for isotropic and orthotropic metals.** Computational Mechanics. pp 49-57, vol. 19.

Simo, J.C.& Taylor, R.L. 1985. **Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp.101-118.

Wang, W., Wang, L.B. & Xu, L.M. 2004. **Formulation of the return-mapping algorithm for elastoplastic soil models.** Computers and Geotechnics. pp 315-338, vol. 31.

Wilkins, M.L. 1964. **Calculation of elasto-plastic flow.** In Methods of Computational Physics 3, Academic, New York.