

# DIMENSIONAMENTO ÓTIMO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

## Optimum design of reinforced concrete`s columns

Francesco Mayer Sias <sup>1</sup>, Élcio Cassimiro Alves <sup>2</sup>

Recebido em 16 de setembro de 2014; recebido para revisão em 03 de outubro de 2014; aceito em 18 de outubro de 2014; disponível on-line em 25 de novembro de 2014.



### PALAVRAS CHAVE:

*Otimização de Pilares;  
Dimensionamento Ótimo;  
Pilares de Concreto  
Armado.*

### KEYWORDS:

*Optimization of columns;  
Optimum sizing;  
Columns of Concrete.*

**RESUMO:** A área da engenharia responsável pelo dimensionamento de estruturas vive em busca da solução que melhor atenderá a vários parâmetros simultâneos como estética, custo, qualidade, peso entre outros. A certeza de que o melhor projeto foi de fato executado é extremamente complicada, pois na prática o que se vê são projetos feitos principalmente baseados na experiência do executor, sem esgotar todas as hipóteses possíveis. É neste sentido que os processos de otimização se fazem necessários na área de dimensionamento de estruturas. É possível obter a partir de um objetivo dado, como o custo, o dimensionamento que melhor atenderá este parâmetro. Alguns estudos nesta área existem, porém ainda carece de mais pesquisa científica. Uma área que ainda carece de um processo de otimização é o dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014) que atenda a uma gama maior de geometrias possíveis. Deve-se também estudar o melhor método de otimização para este tipo de problema dentro dos vários existentes na atualidade. Assim o presente artigo contempla o embasamento conceitual nos temas de dimensionamento de pilares e métodos de otimização bem como o estudo de um caso conhecido na literatura para validação e escolha de modelos de otimização. A partir deste exemplo, foram programados três modelos de otimização que utilizaram os algoritmos da programação quadrática sequencial, o dos pontos interiores e os algoritmos genéticos. Feito isto, foram comparados seus resultados e verificado o mais apropriado neste caso.

**ABSTRACT:** The area of engineering responsible for the design of structures is always in search of the best solution that will satisfy multiple simultaneous parameters like aesthetics, cost, quality, weight and others. The certainty that the best design was actually executed is extremely complicated, because in practice the designs are made primarily based on the experience of the performer, without exhausting all possible hypotheses. It is in this sense that the optimization processes are necessary in the area of design of structures. It is possible to obtain from a given goal, as the cost, the design that will best find this parameter. Some studies in this area exist but still needs more scientific researches. One area that still lacks an optimization process is the design of columns according to NBR 6118 (ABNT, 2014) that cover a wider range of possible geometries. One should also study the best optimization method for this type of problem within the various existing today. Thus the present article is the conceptual foundation in the areas of design of columns and optimization methods as well as the study of a known case in the literature for validation and choice of optimization models. From this example, three optimization models that used the algorithms of sequential quadratic programming, interior point and the genetic algorithms were programmed. This done, their results were compared and verified the one that is the most appropriate in this case.

\* Contato com os autores:

<sup>1</sup> e-mail :fmsias@hotmail.com ( F. M. Sias )

Engenheiro Civil e Mestre em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal do Espírito Santo .

<sup>2</sup> e-mail : elcio.calves1@gmail.com ( E. C. Alves )

Professor Dr. do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo.

## 1. INTRODUÇÃO

O dimensionamento de estruturas em geral, e neste caso as de concreto armado, se dá usualmente por meio de processos iterativos onde a partir de uma geometria pré-definida pelo projetista, baseado na sua experiência, obtém-se um projeto inicial das seções de concreto e aço. Em seguida são feitas as verificações de resistência e comparadas com as solicitações atuantes para decidir se uma nova tentativa pode ser feita com a finalidade de redução dos custos do projeto ou se o resultado encontrado já é satisfatório. Este processo é realizado sucessivamente pelo próprio executor até que julgue ter encontrado a melhor solução dentre as já testadas. Com isto, o tempo de projeto se torna muito longo além de não ser possível a garantia de que o dimensionamento ótimo tenha sido realizado uma vez que não foi feita uma análise sistemática do problema.

Levando em conta as quantidades de variáveis relacionadas ao processo de dimensionamento, dificilmente a melhor solução para o projeto será encontrada desta forma sem que seja feito um estudo detalhado da situação. Para tanto, deveria se obter uma expressão que relacionasse como cada variável de projeto influencia no objetivo que se pretende melhorar no projeto, que normalmente é o custo final deste. Analisando esta expressão em função destas variáveis, seria possível comparar os projetos entre si e, então, a partir de estudos caminhar-se-ia para o projeto mais adequado a cada situação.

Neste sentido que entra a pesquisa de técnicas de otimização aliadas à programação computacional para resolver os problemas relacionados ao dimensionamento estrutural. Esta técnica é trabalhada por meio de uma função objetivo que se pretende encontrar a solução ótima (como o custo, o peso, a área da seção transversal ou qualquer outro parâmetro desejado), podendo as variáveis relacionadas a esta função terem restrições ou não. A otimização pode ser aplicada em várias situações ou problemas que se deseja melhorar e obter o desempenho máximo. Por isto, estes métodos aplicados no dimensionamento de estruturas

também são válidos e trazem benefício comprovado na busca de melhores resultados.

A partir de algoritmos determinísticos ou probabilísticos, escolhidos de acordo com as funções que se está trabalhando, pode-se encontrar o ponto ótimo da função. Ou seja, o conjunto de variáveis utilizadas que geram o valor mínimo da função em estudo. Neste caso a função estudada será o custo da estrutura que está sendo projetada na qual se deseja obter o valor mínimo e as variáveis serão todos os fatores que influenciam no custo desta, como por exemplo, a área de forma, volume de concreto, peso de aço entre outros. Deve-se criar uma função única descrevendo como todos estes fatores inferem no resultado buscado para em seguida aplicar as técnicas de otimização. A qualidade do resultado final de otimização estará diretamente relacionada à fidelidade desta função com a situação real, por isto deve se ter em mãos o maior número possível de dados para uma boa calibração do modelo feito.

Entretanto esta não é uma tarefa simples, pois o dimensionamento irá demandar várias outras funções para se chegar aos valores que a função principal está relacionada. Sabe-se que para dimensionar estruturas de concreto são necessárias inúmeras verificações envolvendo uma quantidade significativa de variáveis, o que torna o processo de otimização mais complexo. Dessa forma cada técnica de otimização será melhor para algum tipo de problema que deverá levar em consideração a quantidade e o tipo de variável, além dos tipos de funções de restrições.

## 2. OBJETIVO

Este artigo desenvolve um estudo a respeito da otimização do dimensionamento de seções transversais de elementos sujeitos à flexo-compressão, como é o caso de pilares. Assim, o objetivo desta pesquisa foi desenvolver um estudo comparativo entre diferentes métodos de cálculo utilizando a modelagem de um sistema cuja solução é conhecida, a fim de se verificar qual apresentará a melhor resposta.

Os métodos utilizados foram dois algoritmos determinísticos (Programação

Quadrática Sequencial e Método dos Pontos Interiores), bem como a análise do problema utilizando um algoritmo probabilístico (Algoritmos Genéticos). Apresenta-se também a eficiência na solução, bem como, a eficácia computacional dos métodos para o problema estudado.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Existem diferentes técnicas para se encontrar a solução ótima de um determinado problema, dependendo das variáveis que estão sendo estudadas, do tipo de restrições e das características do problema em si. Pode-se destacar basicamente duas vertentes dos processos de otimização conhecidos atualmente. São eles: os métodos heurísticos e a programação matemática.

A utilização da programação matemática é muitas vezes impraticável pelo fato de ser muito difícil a aplicação das condições necessárias, que utilizam técnicas e derivação, para encontrar a solução ótima, principalmente nas funções não lineares, que são muito presentes no dimensionamento estrutural. Dessa forma, Vianna (2003) destaca que foram criados alguns métodos de programação para serem aplicados na otimização com a finalidade facilitar sua utilização, especificamente nos casos de programação não linear. O autor cita o método dos critérios de otimização com a finalidade de ser aplicado indiretamente em conjunto com os multiplicadores de Lagrange.

Por sua vez, os métodos heurísticos consistem em técnicas probabilísticas de procura da solução ideal com base nos princípios da genética de sobrevivência dos indivíduos mais adaptados à situação desejada. Dentre estes métodos, vale destacar o método dos Algoritmos Genéticos que tem sido bastante utilizado em trabalhos acadêmicos recentes sobre otimização aplicada ao dimensionamento de estruturas porque se adapta bem a estes problemas, já que não possui restrições quanto ao tipo de função, se ela é ou não derivável, linear ou não linear, contínua ou não, entre outras

características.

Medeiros e Kripka (2012) trataram das diferenças entre as técnicas determinísticas, como é o caso da programação matemática, e probabilísticas, nos casos dos métodos heurísticos de otimização, e ainda realizaram um amplo estudo acerca dos trabalhos atuais que utilizam métodos heurísticos na otimização de estruturas. A partir da comparação destes trabalhos que trataram de vários métodos probabilísticos como o Colônia de Formigas, Colônia de Abelhas, Enxame de Partículas, Busca Tabu, Busca Harmônica, Análise do Recozimento Simulado e Algoritmos Genéticos, concluíram que os mais consolidados são os dois últimos, aplicados em diversos trabalhos acadêmicos. Os pesquisadores alertam ainda que a eficiência do método é diretamente dependente da calibração feita, portanto deve ser dada especial atenção a esta etapa.

Argolo (2000), por meio da técnica dos Algoritmos Genéticos, analisou o dimensionamento ótimo de seções retangulares de concreto armado, solicitadas à flexo-compressão reta. Ele comparou os resultados obtidos utilizando este método com os métodos tradicionais de dimensionamento, os ábacos de iteração. A partir da análise feita, concluiu que a utilização dos ábacos não é recomendada quando se deseja obter redução nos custos do projeto. Verificou ainda que o método dos algoritmos genéticos (AG's) é mais eficaz e robusto ao ser comparado com outros métodos de otimização. Seu algoritmo utilizou parâmetros de penalização durante o processo de desenvolvimento. Seu trabalho, no entanto deixou de abordar alguns aspectos específicos de dimensionamento de cada elemento separado como pilares, vigas e lajes.

Bastos (2004) aprofundou o trabalho feito por Argolo (2000) ao considerar as solicitações de flexo-compressão oblíquas em seções retangulares de concreto armado, também utilizando o método dos algoritmos genéticos. Trata também das diferenças, vantagens e desvantagens dos algoritmos genéticos comparados às programações matemáticas clássicas em relação à otimização no

dimensionamento de estruturas. Conclui que os algoritmos genéticos são mais apropriados por não exigirem que a função seja diferenciável e nem que seja contínua, além de chegar muito mais próximo de um resultado global, situação que os métodos clássicos não podem garantir. Desenvolve ainda um programa em linguagem Visual Basic que utiliza os conceitos de Algoritmos Genéticos para dimensionar estruturas de concreto submetidas à flexo-compressão oblíqua. O trabalho também apresenta algumas limitações já que o software desenvolvido não trabalha com parâmetros variáveis de  $f_{ck}$  e não trata de efeitos de fluência na otimização limitando para isto o índice de esbeltez dos elementos estudados.

Vianna (2003) desenvolveu um programa para otimizar elementos de um edifício tratado no trabalho como um pórtico plano. Para isto, o autor otimizou em separado vigas e pilares, e a partir da nova condição ótima, recalculou esforços e novamente modelou estes elementos até que se encontrasse a solução julgada ótima. Ainda foi destacado que a solução global da estrutura poderia trazer maiores benefícios na otimização desta, porém a alta complexidade de materiais e elementos diferentes fizeram que com a otimização local fosse escolhida. A função objetivo foi a de menor custo dos elementos por unidade de comprimento, e a técnica utilizada foi o método de Lagrange, que é um método determinístico. No estudo de pilares o autor limitou seu estudo aos pilares sujeitos apenas à compressão excêntrica, com linha neutra fora da seção transversal. Ou seja, pilares no domínio 5 da NBR 6118:2014. Também não foram tratados os efeitos de excentricidade exigidos pela referida norma. Além disto, os pilares foram considerados trabalhando apenas a flexão normal (somente em um eixo).

### 3.1. DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO

Neste item será abordado de forma sucinta como a NBR 6118 (ABNT, 2014) e alguns autores renomados como Carvalho e Pinheiro (2009), Fusco (1995) entre outros, tratam do dimensionamento de estruturas de concreto armado, em especial de pilares, no sentido de

explicar conceitos e hipóteses e metodologias utilizadas no dimensionamento.

#### 3.1.1. Hipóteses aceitas no dimensionamento

Smaniotto (2005) explica que ao dimensionar os elementos sujeitos a flexo-compressão são aceitas algumas hipóteses básicas tratadas pela NBR 6118 (ABNT, 2014) para poder validar toda a metodologia de cálculo que será abordada em seguida:

- As seções planas permanecem planas após aplicação das tensões normais até o estado limite último (ELU). Esta hipótese possui a restrição de que a relação entre os pontos onde o momento fletor se anula e a altura considerada útil da seção transversal não pode ser maior que dois.
- O aço e o concreto deformam-se do mesmo modo, ou seja, sua deformação específica é idêntica. Para tanto se deve admitir que a aderência entre estes materiais seja completa.

Bastos (2004) ainda acrescenta outra hipótese importante citada na norma. Pode-se assim descrevê-la:

- As tensões de tração na qual o concreto está submetido podem ser desprezadas já que possuem valores muito pequenos e estando o material sujeito a fissuração, esta resistência será muito prejudicada.

#### 3.1.2. Domínios do E.L.U.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) também define o estado de ruptura como de dois possíveis tipos. A ruptura convencional por deformação plástica excessiva (do aço) e a ruptura por encurtamento limite do concreto. Estes estados são tais que a condição deformada plana do elemento considerado esteja em uma das condições (A, B ou C) do gráfico apresentado no escopo da referida norma. Conforme pode-se perceber na Figura 1, o esquema ainda subdivide os estados limite últimos em oito domínios – reta a, domínios 1, 2, 3, 4, 4a, 5 e reta b – de acordo com seu estado de tensões.

#### 3.1.3. Diagramas tensão x deformação no E.L.U.

Para o estado limite último do concreto,

recomenda-se a utilização do diagrama parábola-retângulo na distribuição de tensões do concreto como mostra a Figura 2. Onde  $f_{cd}$  é o valor de dimensionamento da resistência do concreto à compressão, descrita na norma.

Já para o estado limite último do aço, a NBR 6118:2014 recomenda a utilização de um diagrama simplificado tanto para aços com patamar de escoamento ou sem, válido para temperaturas entre -20 a 150 graus Celsius conforme Figura 3.

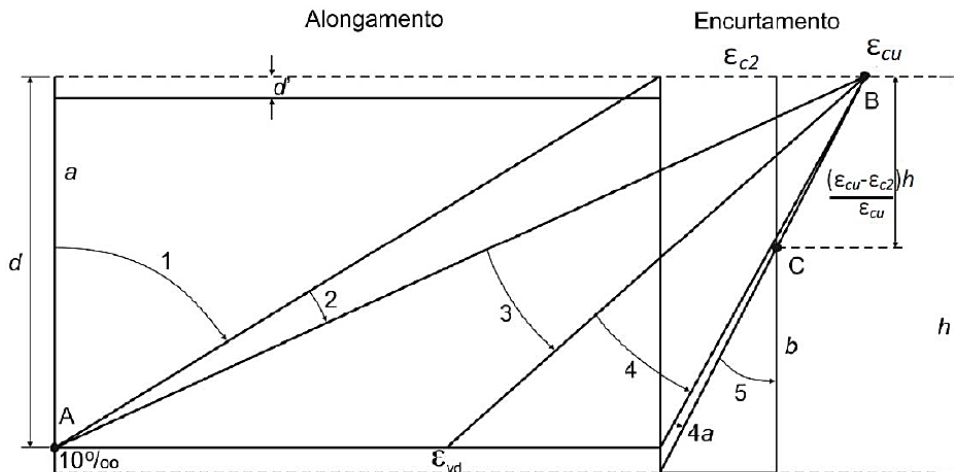


FIGURA 1: Domínios de estado limite último de uma seção transversal. FONTE: NBR 6118 (ABNT, 2014).

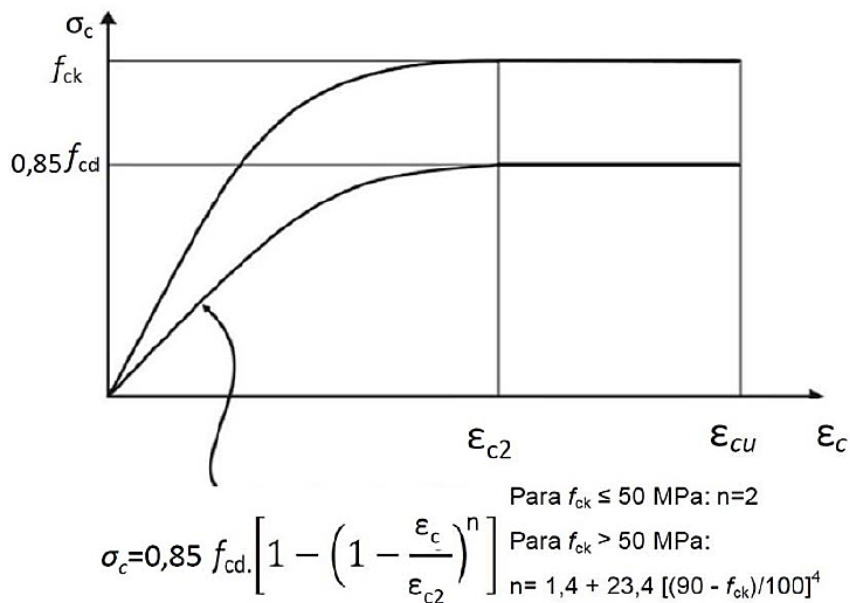
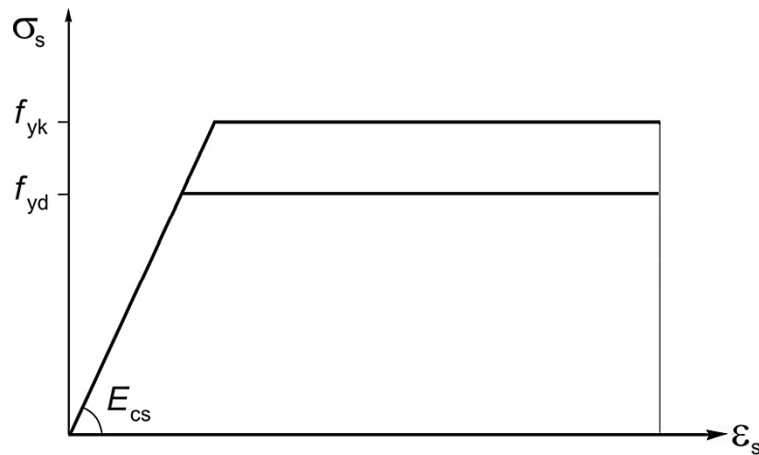


FIGURA 2: Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto. FONTE: NBR 6118 (ABNT, 2014).



**FIGURA 3:** Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva. **FONTE:** NBR 6118 (ABNT, 2014).

### 3.1.4. Excentricidades

No dimensionamento de elementos de concreto, a NBR 6118 (ABNT, 2014) indica que devem ser consideradas excentricidades em todos os casos. Essa excentricidade pode ser dividida em dois grupos: de primeira e de segunda ordem. Este último caso será considerado somente em algumas hipóteses especificadas na referida norma, quando os pilares possuírem esbelteza acima da especificada.

Nas excentricidades de primeira ordem, estão incluídas a excentricidade inicial e a acidental. Esta primeira ocorre quando existe realmente uma distância do centro geométrico da seção ao ponto de aplicação da força ou quando se substitui o momento aplicado no pilar por uma força normal, somada a uma excentricidade fictícia. O outro tipo de excentricidade de primeira ordem, a acidental, ocorre pelo fato de se considerar a incerteza na posição exata do ponto de aplicação da força e também pela possibilidade de imperfeições globais e locais na execução dos elementos.

Já nas excentricidades de segunda ordem, estão englobadas as excentricidades devido aos efeitos de segunda ordem de fato e as devido à fluência do concreto. As primeiras ocorrem devido aos esforços provenientes da posição deformada da estrutura. Para tanto, se considera um aumento na excentricidade total, incluindo a de segunda ordem. A segunda ocorre devido à propriedade do concreto de se deformar ao longo do tempo. A NBR 6118 (ABNT, 2014)

recomenda que seja considerado este tipo de excentricidade quando a esbelteza dos pilares estiver acima de 90.

### 3.2. PROCESSOS DE OTIMIZAÇÃO

A otimização é um importante processo para determinar a melhor solução para um problema dado. Este problema é chamado de objetivo e pode representar alguma quantidade, qualidade ou qualquer outro fator que pode ser apresentado como um número. Nos problemas de otimização são utilizados alguns conceitos importantes de serem destacados. Bastos (2004) define, entre outros, os conceitos de: variáveis de projeto, restrições, função objetivo, solução ótima e espaço de busca.

- As variáveis de projeto são todas aquelas características que têm seu valor modificado de acordo com a modelagem do processo de otimização;
- As restrições são as situações limites na qual o problema estudado não pode infringi-las. Ou seja, os valores da solução devem estar contidos num espaço limitado pelas restrições;
- A função objetivo é o resultado da modelagem do problema. É a função na qual sintetiza todas as variáveis do projeto para chegar num valor para o objetivo do processo;
- A solução ótima é aquela na qual, dentre todo o conjunto possível de soluções, possui o melhor valor para a

função objetivo em estudo. Este pode ser o maior ou menor dentre todos, dependendo do tipo de análise que está sendo feita;

- O espaço de busca é o conjunto de todas as soluções viáveis para o problema, delimitados pelas restrições impostas.

### 3.2.1. Tipos de otimização.

Chaves (2004) descreve alguns tipos de modelos de otimização e os subdivide em:

- Discreta e Contínua

A otimização discreta consiste numa função objetivo em que o número de soluções possíveis é determinado. Ou seja, existe um número finito de soluções no espaço de busca. Já a contínua é definida por possuir um conjunto infinito de soluções, já que a função objetivo será contínua no espaço de busca especificado.

- Restrita e Não-Restrta

Quando as variáveis de projeto possuem algum tipo de restrição, em que um conjunto de valores destas variáveis não pode ser assumido na função ela é chamada de restrita. Já no caso em que as variáveis podem assumir quaisquer valores num conjunto indeterminado, ou seja, não possuem restrição, este tipo de otimização é chamado de não restrito.

Ainda quando for restrita, e todas as funções de restrição e também a função objetivo for linear, será feita uma programação linear. No caso em que qualquer uma destas funções for não linear, a programação será também não linear.

- Local e Global

Uma solução é chamada de local, quando ela é a menor ou maior – dependendo da análise que está sendo feita – dentro de uma vizinhança definida ao redor desta. Esta solução não é necessariamente a menor ou maior dentre todas as possíveis. A solução que atende o objetivo para todas as soluções existentes em todo o espaço de busca será chamada de solução global.

A solução global não é fácil de ser encontrada ou garantida. A maioria dos algoritmos é capaz apenas de achar a solução local de um

problema que será determinado principalmente pelo ponto de partida dado. Neste caso deve-se fazer um estudo sobre a melhor solução ou ponto de partida para o problema.

- Probabilístico e Determinístico

Processos de otimização em que a solução é encontrada por meio de solução matemática exata, baseado em formulações e métodos matemáticos de trabalho da função objetivo são chamados de determinísticos. Estes métodos são indicados para funções mais simples com poucas variáveis, devido ao fato de se tornarem menos eficientes em termos de esforço computacional e procura da solução global. Os processos de otimização que se baseiam em probabilidades de eventos e refinamento dos possíveis conjuntos de solução são chamados de estocásticos, ou probabilísticos. Um processo estocástico que tem sido bastante utilizado na atual literatura para o dimensionamento de estruturas como em Da Silva (2011), Bastos (2004), e vários outros citados em Medeiros e Kripka (2012) é o método dos algoritmos genéticos.

#### 3.2.1.1. Algoritmo de Han-Powell (PQS).

- A) Dado um ponto inicial  $x_0$  e uma aproximação da Hessiana da função Lagrangiana  $B_0$ , fazer  $k=0$ . Assim,  $B_0$  é dada pela Equação 1:

$$B_0 = b_0 I \quad \text{Eq. [1]}$$

Em que:

$B_0$  = aproximação da Hessiana da função Lagrangiana;

$b_0$  = parâmetro definido pelo usuário do algoritmo;

$I$  = matriz Identidade;

O número de reinícios da matriz  $B$  é controlado pelo parâmetro  $n_r$ , definido pelo usuário. O reinício de  $B$  serve para descartar a influência de pontos muito distantes do ponto atual.

- B) Para  $k = k + 1$ , montar e resolver o problema de programação quadrática definido pela Equação 2 determinando os vetores  $d^k$  e  $\lambda^k$ :

Minimizar:

$$g^{(k-1)} \cdot d + \frac{1}{2} d^t \cdot B^{(k-1)} \cdot d \quad d \in R^n \quad \text{Eq. [2]}$$

Sujeito a:

$$C_i^{(k-1)} \cdot a_i^{(k-1)} \cdot d = 0 \quad i= 1...l$$

$$C_i^{(k-1)} \cdot a_i^{(k-1)} \cdot d \leq 0 \quad i= 1+1...m$$

Em que:

$c_i^{k+1}$  = vetor com restrições;

$a_i^{k-1}$  = matriz com gradiente das restrições;

$B^{k-1}$  = aproximação da Hessiana no ponto  $x^{k-1}$ .

C) Verificar os critérios de convergência do algoritmo (Equação 3):

$$\left\{ \begin{array}{l} |g^{(k-1)} \cdot d^k| \leq \text{tol1} \\ \max(c_i^k) \leq \text{tol2} \end{array} \right. \quad \text{Eq. [3]}$$

Em que:

$|g^{k-1} \cdot d^k| \leq \text{tol1}$  = variação da função objetivo na direção  $d^k$ ;

$\max(c_i^k) \leq \text{tol2}$  = verifica experimentalmente o valor da restrição mais violada;

Verificar também os critérios de parada tais como: número de avaliações da função objetivo e número de iterações.

D) Se os critérios de convergência e/ou os de parada não são atendidos faz-se então uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo  $t^k$ , na direção  $d^k$  de forma que o novo estimador da solução  $x^k = x^{k-1} + t^k d^k$  seja um ponto que contribua para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita sobre a função de penalidade ( $p$ ), construída no intuito de impor um alto custo à violação das restrições. Esta função é definida pela Equação 4:

$$p(t) = p(x + td) = f(x) + \sum_{i=1}^l r_i |c_i(x)| + \sum_{i=1}^m r_i \cdot \max[c_i(x), 0] \quad \text{Eq. [4]}$$

Em que:

$r_i$  = fatores de penalidades;

A busca é aproximada, isto é a solução  $t^*$  não é o mínimo de  $p(t)$ , mas atende a certo decréscimo pré-estipulado em  $p(t)$  considerado

satisfatório. O coeficiente de decréscimo da função é dado pelo parâmetro  $\gamma$  definido pelo usuário.

E) Atualização da matriz  $B^k$  do subproblema quadrático através do método BFGS.

F) Retorno à etapa 2.

### 3.2.1.2. Método dos Pontos Interiores.

Outro método conhecido na literatura é o dos pontos interiores. Ele trabalha especificamente com a região viável do problema. Ou seja, aquela na qual está delimitada pela função objetivo e pelas funções de restrição, podendo estas ser de igualdade ou de desigualdade. Ele consiste basicamente em determinar alguns pontos no interior desta região viável e a partir destes continuar a procura pelo ponto ótimo que pertencerá da mesma forma a esta região.

Todos os pontos obtidos em sequência possuirão sempre valores decrescentes. Então, mesmo que a convergência para o ponto ótimo não seja garantida, o último ponto encontrado será sempre menor ou igual aos demais, portanto será viável.

Rodrigues Júnior (2005) demonstra em seu trabalho um esquema deste método que permite chegar às expressões gerais de seu desenvolvimento.

### 3.2.1.3. Algoritmos genéticos.

Bastos (2004) descreve que os Algoritmos Genéticos foram criados baseados na ideia de evolução das espécies segundo os princípios darwinianos onde somente os indivíduos mais aptos sobrevivem no processo de reprodução. Para isto o algoritmo trabalha com uma população de elementos, realizando operações de mutação, de cruzamento entre eles e de seleção, gerando desta forma indivíduos novos criados a partir da prioridade de seleção dos indivíduos reprodutores mais aptos para realizarem as mesmas operações e desta forma prosseguir no processo de busca da solução ideal.

Medeiros e Kripka (2012) explicam que a elaboração do algoritmo deverá avaliar a aptidão dos indivíduos para escolha daqueles que



serão reproduzidos e irão criar a nova geração. Estes são alterados por dois operadores principais: a mutação e a recombinação. O primeiro modifica os genes do indivíduo. Ocorre com menos frequência do que a recombinação. Já esta segunda trabalha na construção de um novo resultado com base em dois indivíduos selecionados ao acaso para esta operação. De acordo com a classificação de aptidão já realizada, aqueles com menos potencial terão também menor probabilidade de serem selecionados para esta operação.

Da Silva (2011) divide os algoritmos genéticos em cinco características principais ao serem manipulados para encontrar a solução:

- codificação genética dos resultados para a questão;
- criação da população inicial de resultados;
- análise de aptidão dos resultados encontrados;
- operadores genéticos que manipularão os resultados para obter novos indivíduos;
- parâmetros definidos no processo de mutação e reprodução dos resultados;

A manipulação destes parâmetros permitiu que se criassem codificações baseadas nos algoritmos genéticos, que são capazes de resolver uma infinidade de problemas relacionados à otimização de forma robusta e com uma eficiência já comprovada na literatura.

#### 4. EXEMPLOS COMPARATIVOS

Existem duas diretrizes a serem escolhidas para se utilizar na otimização de pilares. A primeira é trabalhar com métodos determinísticos de otimização, e neste caso em específico, o de programação quadrática sequencial e o dos pontos interiores. Conforme descrito no item 3.2, pode-se observar que estes métodos são apropriados para determinados tipos de funções objetivo e de restrições, pelo fato de não trabalharem bem com funções que não sejam contínuas ou diferenciáveis. A segunda diretriz é

trabalhar com métodos estocásticos, e neste caso, o método dos algoritmos genéticos. Ainda conforme revisado no item 3.2, os algoritmos genéticos têm sido amplamente utilizados na atual literatura pelo fato de trabalharem bem com vários tipos diferentes de funções.

Assim, é necessário que se realize um teste em um exemplo similar ao que será estudado com o objetivo de definir qual destes métodos é o mais apropriado para este tipo de caso. Todos os métodos serão desenvolvidos no programa MathLab. Para tanto, será utilizada a função “fmincon”, que soluciona problemas determinísticos restritos, para resolver o problema pelo método da programação quadrática sequencial e pelo método dos pontos interiores e a função “ga”, que soluciona problemas estocásticos pelo método dos algoritmos genéticos.

O exemplo escolhido será o mesmo desenvolvido por Vianna (2003) e aprofundado por Chaves (2004). No caso deste trabalho, os autores desenvolveram um estudo de pilares submetidos a alguns esforços normais e excentricidades iniciais tendo como parâmetros de entrada os dados necessários como o  $f_{ck}$  do concreto, o  $f_{yk}$  do aço, cobertura da armação, custos de concreto por unidade de volume, aço por unidade de peso e forma por unidade de área, peso específico do aço, dentre outros fatores.

##### 4.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Para poder comparar com mais propriedade os resultados obtidos pelas funções, será reproduzida apenas uma série de otimização estudada pelos autores que será a de excentricidade de 1,0 cm atuando na direção da altura dos pilares. Isto se deve pelo fato de que para se realizar um estudo adequado da função de algoritmos genéticos deverão ser realizados para cada esforço solicitantes, vários testes com valores diferentes de taxas de mutação, cruzamento e tamanho da população.

A função objetivo que os autores propuseram em seu estudo é a função de custo do pilar em função da seção transversal do pilar e da

área de aço. Ela é demonstrada por meio da Equação 5:

$$F = C_1 \cdot x_1 \cdot x_2 + C_2 \cdot x_3 + C_3 \cdot (x_1 + x_2) \quad \text{Eq. [5]}$$

Em que:

$x_1$  = base da seção transversal do pilar (m);

$x_2$  = altura da seção transversal do pilar (m);

$x_3$  = Área de aço da seção transversal do pilar (m<sup>2</sup>);

$c_1$  = Custo do concreto por unidade de volume (R\$/m<sup>3</sup>);

$c_2$  = (Custo do aço por unidade de massa) x (peso específico do aço) (R\$/m<sup>3</sup>);

$c_3$  = 2 x (Custo de forma por unidade de área) (R\$/m<sup>2</sup>);

Além da função objetivo, os autores ainda definiram as funções de restrição de acordo com algumas situações definidas em função do arranjo das armaduras longitudinais do

pilar. As situações são conforme a Figura 4:

Onde se definem as situações da seguinte forma:

- $x_2 \leq 40$  cm → Situação 1;
- $40\text{cm} \leq x_2 \leq 80\text{cm}$  → Situação 2;
- $80\text{cm} \leq x_2 \leq 120\text{cm}$  → Situação 3;
- $x_2 \geq 120\text{cm}$  → Situação 4.

O comprimento “L” do pilar não foi considerado, pois os autores não analisaram as influências deste parâmetro no dimensionamento deste pilar. A NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda que sejam feitas todas as análises referidas à esbeltez e possíveis efeitos de segunda ordem. Como o resultado dos autores não levou em consideração estas análises, os resultados obtidos devem ser verificados se atendem estes requisitos em outra análise separada.

Assim, os autores definiram para cada situação as seguintes funções de restrição Equações de 6 a 9:

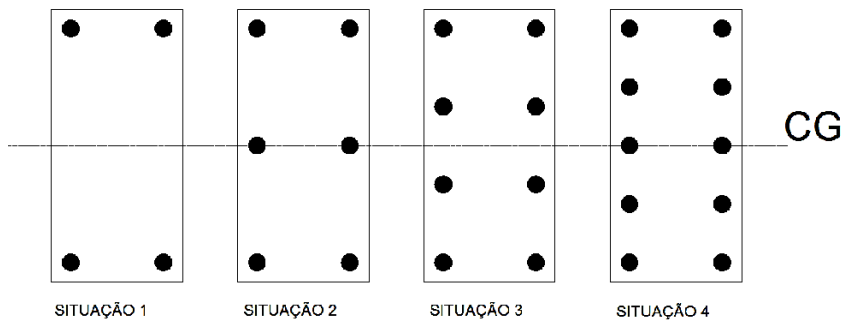


FIGURA 1: Arranjos de armadura utilizados.

FONTE: Vianna (2003).

$$\text{Situação 1 : } \begin{cases} 0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{2} \cdot \left( 294 \cdot \frac{(x_4 - x_2 + d')}{(7x_4 - 3x_2)} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \\ \frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') (f_{yd} - 294 \cdot \frac{(x_4 - x_2 + d')}{(7x_4 - 3x_2)}) - M_d = 0 \\ 1,25 \cdot x_2 - x_4 \leq 0 \end{cases} \quad \text{Eq. [6]}$$

$$\text{Situação 2 : } \begin{cases} 0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{3} \cdot \left( 147 \cdot \frac{(4x_4 - 3x_2 + d')}{(7x_4 - 3x_2)} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \\ \frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') (f_{yd} - 294 \cdot \frac{(x_4 - x_2 + d')}{(7x_4 - 3x_2)}) - M_d = 0 \\ 1,25 \cdot x_2 - x_4 \leq 0 \end{cases} \quad \text{Eq. [7]}$$

$$\text{Situação 3 : } \begin{cases} 0,85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{4} \left( 98 \frac{(6x_4 - 5x_2 + 4d')}{(7x_4 - 3x_2)} + 2 \cdot f_{yd} \right) - N_d = 0 \\ \frac{x_3}{24} (x_2 - 2 \cdot d') (4f_{yd} - 98 \cdot \frac{(12x_4 - 11x_2 + 10d')}{(7x_4 - 3x_2)}) - M_d = 0 \\ 1,25 \cdot x_2 - x_4 \leq 0 \end{cases} \quad \text{Eq. [8]}$$

$$\text{Situação 4 : } \begin{cases} 0,85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{5} \left( 73,5 \frac{(12x_4 - 9x_2 + 6d')}{(7x_4 - 3x_2)} + 2 \cdot f_{yd} \right) - N_d = 0 \\ \frac{x_3}{20} (x_2 - 2 \cdot d') (3f_{yd} - 73,5 \cdot \frac{(12x_4 - 11x_2 + 10d')}{(7x_4 - 3x_2)}) - M_d = 0 \\ 1,25 \cdot x_2 - x_4 \leq 0 \end{cases} \quad \text{Eq. [9]}$$

**Em que:**

$x_4$  = profundidade da linha neutra na seção transversal do pilar (m);

$d'$  = cobrimento da armação (m);

$N_d$  = Força normal atuante na seção transversal do pilar (kN);

$M_d$  = Momento Fletor atuante na seção transversal do pilar (kN.m);

Além disto, os autores utilizaram os seguintes dados de entrada para resolverem a otimização dos pilares:

**Resistência característica e de cálculo dos materiais:**

- $f_{ck} = 20 \text{ Mpa} \rightarrow f_{cd} = 1,428 \text{ kN/cm}^2$ ;
- $f_{yk} = 500 \text{ Mpa} \rightarrow f_{yd} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$ .

**Custo dos materiais:**

- Custo do concreto: R\$ 228,39 / m<sup>3</sup>;
- Custo do aço: R\$ 2,73 / kg;
- Custo da forma: R\$ 31,58 / m<sup>2</sup>.

**Valores limites da variáveis:**

- $20 \text{ cm} \leq x_1 \leq 40 \text{ cm}$ ;
- $20 \text{ cm} \leq x_2 \leq 160 \text{ cm}$ ;
- $0,004 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq x_3 \leq 0,04 \cdot x_1 \cdot x_2$ ;
- $d' = 3 \text{ cm}$ .

**Valores das forças atuantes:**

- Força Normal: 2.000 kN a 10.000 kN com incrementos de 1.000 kN;
- Momento Fletor Atuante: Como a excentricidade é de 1cm, o momento variará de 20 kN.m a 100 kN.m com incrementos de 10 kN.m.

**4.2. FORMULAÇÃO E RESULTADOS DA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL.**

De acordo com as Equações 5, 6, 7, 8 e 9, além dos limites e dados de entrada apresentados na seção anterior, deve-se formular e apresentar o problema de acordo com a estrutura da função "fmincon" do programa MathLab para que este possa ser implementado e analisado.

A estrutura desta função é a seguinte (Equação 10):

$$\min_x f(x) \quad \text{em que} = \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ c_{eq}(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad \text{Eq. [10]}$$

**Em que:**

$x$  = o vetor das variáveis do problema;

$b$  = o vetor resposta do sistema de inequações lineares;

$beq$  = o vetor resposta do sistema de equações lineares;

$lb$  e  $ub$  = vetores de limite superiores e inferiores do vetor das variáveis;

$A$  = a matriz do sistema de inequações lineares;

$Aeq$  = a matriz do sistema de equações lineares do problema;

$c(x)$  = o vetor que contém as inequações não lineares do problema;

$ceq(x)$  = o vetor que contém as equações não lineares do problema;

$f(x)$  = a função objetivo do problema;

Os resultados obtidos com a programação feita no MathLab, utilizando toda formulação desenvolvida nesta seção se encontram na Tabela 1:

**TABELA 1 :** Resultados obtidos com a programação quadrática sequencial.

Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	x (cm)	Custo (R\$/m)
1	2000	2000	39,21	39,21	6,15	50	R\$ 97,83
2	3000	3000	40	58,97	9,44	93	R\$ 136,61
3	4000	4000	40	78,63	12,58	100	R\$ 163,69
4	5000	5000	40	96,1	15,38	136	R\$ 206,70
5	6000	6000	40	115,32	18,45	149	R\$ 242,49
6	7000	7000	40	136,36	21,82	187	R\$ 282,72
7	8000	8000	40	155,84	24,93	199	R\$ 319,50
8	9000	9000	40	160	70,81	200	R\$ 424,24
9	10000	10000	40	160	128,3	200	R\$ 547,45

#### 4.3. FORMULAÇÃO E RESULTADOS DOS PONTOS INTERIORES.

O método dos pontos interiores, quando programado no Matlab com auxílio do pacote de funções de otimização deste software, possui a

mesma estrutura que o método da programação quadrática sequencial. Deste modo, não serão repetidas as funções descritas na seção anterior. Assim, os resultados obtidos com este método são conforme Tabela 2 a seguir:

**TABELA 2:** Resultados obtidos com os pontos interiores.

Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	x (cm)	Custo (R\$/m)
1	2000	2000	39,34	39,37	5,53	74,31	R\$ 96,93
2	3000	3000	40	58,97	9,44	127,8	R\$ 136,61
3	4000	4000	40	78,63	12,58	159	R\$ 173,72
4	5000	5000	40	96,1	15,38	239,12	R\$ 206,70
5	6000	6000	40	115,32	18,45	239,99	R\$ 242,99
6	7000	7000	40	136,36	21,82	313,56	R\$ 282,72
7	8000	8000	40	155,84	24,93	319,97	R\$ 319,50
8	9000	9000	40	160	70,81	318,65	R\$ 424,24
9	10000	10000	40	160	128,3	319,98	R\$ 547,45

#### 4.4. FORMULAÇÃO E RESULTADOS DOS ALGORITMOS GENÉTICOS.

Para programar no MathLab o problema descrito, de modo que seja solucionado pelos algoritmos genéticos, foi utilizada a função “ga” do pacote de funções já contidas no próprio programa.

A estrutura desta função assemelha-se com a função utilizada na programação quadrática sequencial nos parâmetros de entrada. Desta forma, foram utilizadas as mesmas funções objetivo, de restrições lineares e não lineares, bem como os limites superiores e inferiores para cada situação. Convém, entretanto, destacar que foram refeitas para os mesmos dados de entrada, cinco vezes a análise, e o resultado mais adequado (aquele com menor custo final) foi o escolhido.

Além disto, os resultados de cada problema variam ainda com a escolha de alguns fatores utilizados na programação do algoritmo genético. Dentre estes fatores destacam-se o tamanho da população, o valor da

taxa de cruzamento, e o valor da taxa de mutação.

TELES E GOMES (2010), destacam em seu trabalho que os valores mais apropriados para estes fatores em um problema como este são de 400, 200 e 100 para o tamanho da população, 100%, 80% e 60% para a taxa de cruzamento, e 10%, 5% e 1% para a taxa de mutação variando a combinação destes fatores em cada problema específico.

Desta forma, também será combinado os valores destes parâmetros e o resultado mais apropriado será escolhido para cada caso. Assim, foram obtidas 27 combinações diferentes entre estes parâmetros de entrada, além de serem analisadas 5 vezes cada combinação desta seção da tabela. Os melhores valores foram escolhidos e comparados com os resultados obtidos pelo método da programação quadrática sequencial e dos pontos interiores. Os resultados obtidos pelos algoritmos genéticos podem ser visualizados conforme Tabela 3:

TABELA 3 : Resultados obtidos com algoritmos genéticos.							
Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	x (m)	Custo (R\$/m)
1	2000	2000	39,07	38,97	6,98	1	R\$ 99,02
2	3000	3000	39,03	60,38	9,63	1,6	R\$ 137,27
3	4000	4000	39,79	78,97	12,79	1,6	R\$ 174,20
4	5000	5000	38,18	100,68	15,37	2,4	R\$ 208,44
5	6000	6000	38,62	116,1	25,66	2,4	R\$ 255,11
6	7000	7000	39,94	135,39	25,08	3,2	R\$ 287,99
7	8000	8000	39,66	156,49	26,81	3,2	R\$ 323,10
8	9000	9000	39,98	158,2	76,05	3,2	R\$ 432,61
9	10000	10000	39,98	152,53	149,41	3,03	R\$ 581,05

#### 4.5. ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Com os resultados obtidos por meio dos algoritmos desenvolvidos no software MathLab com auxílio das funções “fmincon” e “ga” para desenvolver a técnica de otimização de programação quadrática sequencial, pontos interiores e de algoritmos genéticos respectivamente, foram feitas análises para identificar o método mais indicado para o caso em estudo.

A Tabela 4 mostra os resultados obtidos para a função objetivo deste exemplo: o custo por metro dos pilares estudados.

O custo dos pilares obtido pela programação com o método da programação

quadrática sequencial e dos pontos interiores quando comparados com o dos algoritmos genéticos foram menores em todas as situações. Isto significa que a programação matemática é apropriada para este problema, pelo fato de as funções objetivo e de restrições preencherem todos requisitos citados nas seções anteriores, como serem convexas, deriváveis em primeira e segunda ordem, dentre outros. Estes fatores fazem com que os métodos de programação escolhidos sejam bastante eficazes, quando comparado com métodos heurísticos como o algoritmo genético.

Para melhor visualização da comparação entre os resultados obtidos com os respectivos métodos, pode-se observar a Figura 5.

Seção	CUSTO PQS	CUSTO PONT. INT.	CUSTO AG
1	R\$ 97,83	R\$ 96,93	R\$ 99,02
2	R\$ 136,61	R\$ 136,61	R\$ 137,27
3	R\$ 163,69	R\$ 173,72	R\$ 174,20
4	R\$ 206,70	R\$ 206,70	R\$ 208,44
5	R\$ 242,49	R\$ 242,99	R\$ 255,11
6	R\$ 282,72	R\$ 282,72	R\$ 287,99
7	R\$ 319,50	R\$ 319,50	R\$ 323,10
8	R\$ 424,24	R\$ 424,24	R\$ 432,61
9	R\$ 547,45	R\$ 547,45	R\$ 581,05

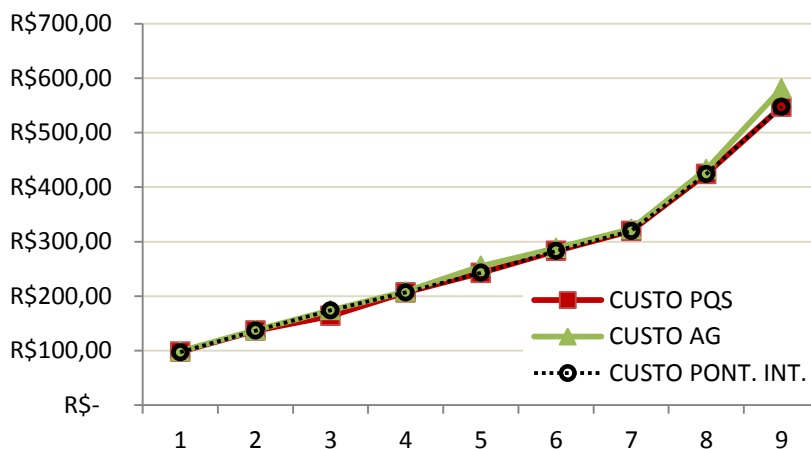


Figura 5: Comparação entre os métodos de otimização.

Pode-se visualizar também as seções transversais obtidas em cada método por meio da Tabela 5.

Ao se comparar os valores das seções transversais obtidas, verifica-se que todos foram próximos uns dos outros, variando pouco em cada variável para cada caso. Isto ocorre porque foram todos modelados com as mesmas funções objetivo e de restrições, devido ao fato de se utilizarem pacotes do software Matlab, que já uniformizam de certa forma os dados de entrada dos algoritmos. As diferenças encontradas devem-se, portanto ao modo como é encontrada a solução ótima em cada método.

Embora não se tenha os valores exatos dos resultados ótimos destas funções na literatura, pode-se concluir, a partir dos resultados obtidos nas análises, que para este caso o método mais apropriado é o de programação matemática ao invés dos métodos heurísticos.

## 5. CONCLUSÕES

Pode-se perceber que existe uma infinidade de problemas na área de dimensionamento de estruturas que o estudo de otimização é utilizável, pois o objetivo de todo dimensionamento é obter sempre uma estrutura com menor custo, peso e outros fatores que podem ser maximizados ou

minimizados. A sofisticação do tema estará sempre na modelagem mais adequada à realidade possível para gerar resultados mais satisfatórios e maior abrangência de aplicabilidade.

No caso do exemplo estudado, após a otimização ter sido feita por dois métodos determinísticos e um probabilístico, foi possível perceber que os primeiros obtiveram melhores resultados que o último. Isto pode ser explicado pelo fato de que quando as funções objetivo e de restrições obedecem às limitações impostas pelo método, ou seja, são contínuas e diferenciáveis, os métodos determinísticos trabalham melhor que os probabilísticos.

Ao comparar ainda os resultados do algoritmo que utilizou a programação quadrática sequencial com o algoritmo que utilizou o método dos pontos interiores, foi possível perceber que os resultados obtidos foram, para todas situações, muito próximos ou iguais. Conclui-se com isto que ambos os métodos são indicados para este exemplo.

É importante destacar, no entanto, que quanto mais simplificações nas técnicas utilizadas, maior é o comprometimento dos resultados, e menor será sua utilização fugindo do objetivo que é obter o projeto ótimo para o problema dado. Por isto o principal cuidado para o sucesso do algoritmo de otimização está na modelagem para que permita estudar e inserir o maior número possível de valores para as variáveis relacionadas à função objetivo.

Tabela 5 : Valores das seções transversais obtidas nos métodos.

SEÇÃO	PQS				AG				PONTOS INTERIORES			
	b (cm)	h (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	x (cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	x (cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	x (cm)
1	39,2	39,2	6,2	50,0	39,1	39,0	7,0	100,0	39,3	39,4	5,5	74,3
2	40,0	59,0	9,4	93,0	39,0	60,4	9,6	160,0	40,0	59,0	9,4	127,8
3	40,0	78,6	12,6	100,0	39,8	79,0	12,8	160,0	40,0	78,6	12,6	159,0
4	40,0	96,1	15,4	136,0	38,2	100,7	15,4	240,0	40,0	96,1	15,4	239,1
5	40,0	115,3	18,5	149,0	38,6	116,1	25,7	240,0	40,0	115,3	18,5	240,0
6	40,0	136,4	21,8	187,0	39,9	135,4	25,1	320,0	40,0	136,4	21,8	313,6
7	40,0	155,8	24,9	199,0	39,7	156,5	26,8	320,0	40,0	155,8	24,9	320,0
8	40,0	160,0	70,8	200,0	40,0	158,2	76,1	320,0	40,0	160,0	70,8	318,7
9	40,0	160,0	128,3	200,0	40,0	152,5	149,4	303,0	40,0	160,0	128,3	320,0

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118: **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- ARGOLO, W. P.; **Otimização de seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão reta utilizando algoritmos genéticos**. 2000. 141f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- BASTOS, E. A. **Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2004, 151f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M.; **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto**. São Paulo: PINI, 2009, 589 p., Volume 2.
- CHAVES, I. A. **Otimização de Pilares de Concreto Armado Mediante Uniformização do Índice de Confiabilidade**. 2004. 178f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto: Solicitações Normais**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1995, 464p.
- MATLAB, Optimization toolbox user's guide. Natick: Mathworks, 2007.
- MEDEIROS, G.F.; KRIPKA, M. **Algumas aplicações de métodos heurísticos na otimização de estruturas**. Rev. CIATEC, Universidade de Passo Fundo, v.4, n.1, p.p.19-32, 2012.
- RODRIGUES JÚNIOR, S. J. **Otimização de Pilares de Edifícios Altos de Concreto Armado**. 2005. 154f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- DA SILVA, M. M.; **Otimização de Estruturas Reticuladas Incluindo Não-Linearidade Geométrica**. 2011. 135f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.
- SMANIOTTO, A.; **Dimensionamento e Detalhamento Automático de Pilares Retangulares Submetidos à Flexão Composta Oblíqua**. 2005. 120f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2005.
- TELES, M. L.; GOMES, H. M. **Comparação de algoritmos genéticos e programação quadrática sequencial para otimização de problemas em engenharia**. Rev. Teoria e prática na Engenharia Civil. Rio Grande, n.15, p-29-39, 2010.
- VIANNA, L. C. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos**. 2003. 127f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.