# A EVOLUÇÃO DA NOÇÃO DE SISTEMA AXIOMÁTICO [L'ÉVOLUTION DE LA NOTION DE SYSTÈME AXIOMATIQUE][1]

Andres Raggio
Traduzido por: Stefano Domingues Stival
PUC do Rio de Janeiro
Wagner de Campos Sanz
Universidade Federal de Goiás
wagner@fchf.ufg.br

"Cést un livre, on n'a pas besoin de savoir lire pour le lire; cést un livre – je veux vous dire – qui se lit tout seul." (Le diable à Joseph en lui montrant un livre magique) *L'Histoire du soldat*, de Ramuz-Strawinsky.

As críticas da razão teórica são um lugar comum da filosofia contemporânea. Mas, geralmente, essas críticas utilizam idéias muito antigas no tocante à natureza do conhecimento teórico, de sorte que muitas de suas análises e controvérsias carecem de verdadeira significação. As atitudes que elas pretendem atacar ou defender não são mais que fantasmas históricos, mortos há muitos séculos. Corajosas e ardorosas, elas embarcam para combater Tróia, ignorando que Tróia não existe mais, e mesmo que Schlieman a redescobriu.

A noção de sistema axiomático é crucial para a compreensão do funcionamento e da significação do conhecimento teórico. Uma exposição das principais etapas pelas quais essa noção passou, desde os gregos até os nossos dias, pode esclarecer mais de um capítulo da filosofia atual. É claro que nós não pretendemos fazer aqui uma análise exaustiva, tarefa impossível se levarmos em conta a complexidade do processo histórico concreto. Ao contrário, nós nos limitaremos a fazer cortes sincrônicos em alguns momentos-chave da história da ciência teórica e da reflexão filosófica a ela relacionada, numa tentativa de descrever as estruturas fundamentais e sobretudo os momentos dessas estruturas que são particularmente importantes para a compreensão do processo diacrônico total. Nós não ignoramos os riscos que corremos – sobretudo se se tem em conta o descrédito no qual caíram tentativas similares de inspiração hegeliana ou heideggeriana –, mas a urgência do problema não nos deixa outra alternativa.

## Aristóteles e a noção clássica de sistema axiomático

Em seus *Analytica Posteriora*, Aristóteles expôs o que se costuma chamar de concepção clássica de sistemas axiomáticos. Se bem que, nos últimos tempos, os historiadores da matemática grega – sobretudo Arpad Szabo[2] – tenham encontrado sérias divergências entre a concepção clássico-aristotélica e as idéias que guiaram os matemáticos gregos na edificação das primeiras teorias axiomáticas; seu vigor extraordinário em duração e em profundidade faz dela um objeto obrigatório de nossa exposição. Em outros termos: a despeito das dúvidas que nós possamos ter quanto à fidelidade dessa concepção com relação à ciência de sua época e igualmente as dificuldades de interpretação que ela suscita no sistema aristotélico, a importância do aristotelismo – do qual ela é um dos pilares – faz dela um dos pontos de partida necessários na série de cortes sincrônicos que nós nos propusemos a fazer.

Nossa tarefa torna-se muito mais fácil do que poderíamos esperar, graças ao artigo de Heinrich Scholz, "Die Axiomatik der Alten",[3] que satisfaz ao mesmo tempo as exigências mais severas do rigor filosófico e da teoria lógica. Scholz determina os traços principais da noção clássico-aristotélica de sistema axiomático da seguinte maneira:

A. Uma ciência no sentido aristotélico é um conjunto de enunciados relativos a um mesmo domínio (γενος), que possui as seguintes propriedades:

1. Os enunciados se dividem em axiomas e teoremas.

2. Os conceitos que compõem os enunciados se dividem em conceitos fundamentais e derivados.

B. Os axiomas devem ser:

1. Imediatamente evidentes, e por essa razão indemonstráveis.

2. Suficientes para que se possa deduzir a partir deles, utilizando unicamente as regras da lógica, todos os teoremas.

C. Os conceitos fundamentais devem ser:

1. Imediatamente compreensíveis e, por essa razão, indefiníveis.

2. Suficientes para que se possa definir a partir deles, segundo as regras da lógica, todos os conceitos derivados.

D. Os axiomas devem ser enunciados necessários.

Tendo em conta a evolução ulterior dos sistemas axiomáticos, nós analisaremos os seguintes pontos do esquema fundamental de Scholz.

(1) *A exigência de homogeneidade ontológica*: toda ciência possui uma referência ontológica unívoca. Se bem que Aristóteles não ignore a importância de um pensamento teórico que opere com formas vazias de conteúdo ontológico, ele confere a estas últimas um papel secundário.[4] Não é por acaso que a famosa μεταβασις εις λλο γενος será, segundo o Estagirita, um dos erros típicos na constituição de uma ciência. De um ponto de vista sintático e usando uma terminologia moderna, a exigência de homogeneidade ontológica tem por conseqüência que os axiomas e teoremas, para Aristóteles, nada mais podem conter, além das constantes puramente lógicas, do que constantes através das quais se realiza a dita homogeneidade ontológica. Por exemplo, no enunciado de geometria elementar "se *a* está entre *b* e *c*, então *a* está entre *c* e *b*", a única expressão extralógica é a constante "estar entre", que especifica por si só a referência ontológica ao espaço. Deste enunciado, nós pode-

mos passar a uma função proposicional sem nenhuma referência ontológica, substituindo esta constante por uma variável: "se *a R b* e *c* então *a R c* e *b*". É igualmente por essa razão que os axiomas podem ser verdadeiros ou falsos; isto não seria assim se, no lugar das constantes extralógicas, tivéssemos variáveis.

Mas Aristóteles não se restringe à idéia de que os axiomas poderiam ter um valor de verdade determinado: por meio de (2) *a exigência de evidência e necessidade*, ele postula que essa verdade será acessível de uma maneira especial. A evidência da verdade dos axiomas deriva, segundo Aristóteles, diretamente da intelecção dos conceitos que os compõem (η τους ορους γνωριζομεν), o que constitui, segundo Scholz, o antecedente histórico essencial do que se chama *evidentia ex terminis*. Juntemos a isso que, segundo essa concepção aristotélica, os axiomas tornam-se verdades analíticas, já que, de acordo com a acepção moderna dessa expressão, os enunciados analíticos são aqueles cuja verdade se deduz da verdade dos conceitos que os compõem. Esse resultado, se bem que um pouco surpreendente, se integra muito bem à concepção aristotélica que tenta unir, e não separar, as evidências formais e materiais; sua separação, ao contrário, é uma característica do pensamento contemporâneo.

Aristóteles chega a essa exigência de evidência partindo de dois pressupostos de base de sua filosofia: em primeiro lugar que a relação de dedutibilidade entre premissas e conclusão (ou relações paralelas de definibilidade entre conceitos) é absoluta, e não como se considera habitualmente hoje relativa a um sistema teórico ou a um sistema de regras de dedução. Em segundo lugar, a premissa – e, em geral, uma causa – de uma conclusão corretamente inferida possui um grau mais alto de evidência do que esta última. Dessa maneira, a uma hierarquia absoluta induzida pela relação de dedutibilidade corresponde uma hierarquia absoluta de evidências.

Enfim, Aristóteles confere maior precisão ao estatuto lógico dos axiomas exigindo que eles sejam necessários; ele introduz desse modo um conceito modal, bem característico de toda a sua filosofia, para diferenciar as deduções corretas de uma ciência das deduções igualmente corretas dos argumentos dialéticos. Os primeiros, possuindo premissas necessárias, conduzem necessariamente a conclusões necessárias; nos segundos, ao contrário, não há garantia da necessidade das conclusões porque elas partem de premissas simplesmente hipotéticas.

(3) *O caráter implícito da lógica subjacente* é típico da noção clássico-aristotélica do sistema axiomático. Aristóteles parece identificar por vezes a noção geral de dedutibilidade lógica com aquela de dedutibilidade silogística; no entanto, ele nos fala simplesmente *daquilo que se segue das premissas* (εκ τϖν κει μενων), mas jamais põe-se o problema de definir a noção geral de dedutibilidade lógica.

Enfim, um traço bem característico do pensamento do Estagirita e que, nós o veremos, foi o aspecto mais duradouro de sua concepção: (4) *A exigência de finitude*. Aristóteles se opôs voluntariamente às teorias da ciência que identificam os enunciados científicos aos enunciados demonstráveis. Isto só é possível – quando se exclui a circularidade – quando se admite a existência de um *regressus ad infinitum* na série ascendente das premissas. Mas Aristóteles é claro a esse respeito: "os enunciados de uma demonstração que exigem uma infinidade de premissas não são demonstráveis; eles o são somente quando um número finito de premissas é suficiente" (*Analytica Posteriora*, I, 24, p. 86 a 5, segundo a tradução de Scholz. O professor Granger me fez observar, com razão, que essa tradução de Scholz é forçada; o contexto parece indicar que Aristóteles refere-se aqui às noções e não às demonstrações. Granger chama a minha atenção para a passagem seguinte da mesma obra – 84 a 32 –, que é bem mais clara e unívoca: "Com efeito, se há princípios, não podemos demonstrar a todos, nem ir ao infinito"). É precisamente essa exigência de finitude, junto à idéia aristotélica de dedutibilidade absoluta e de uma gradação natural das evidências, que o conduz a exigir que os axiomas de uma ciência sejam evidentes ao grau máximo e não dedutíveis de outros enunciados. Ademais, notemos que essa exigência de finitude é, além de uma característica da lógica, também é igualmente da ontologia e da cosmologia aristotélicas.

A evolução ulterior da noção de sistema axiomático pode ser considerada como uma crítica crescente e um abandono sucessivo destas quatro características da concepção aristotélica:

1) a exigência de homogeneidade ontológica;
2) a exigência de uma evidência e de uma necessidade;
3) o caráter implícito da lógica subjacente;
4) a exigência de finitude.

## Os sistemas axiomáticos como sistemas hipotético-dedutivos

A noção clássico-aristotélica de sistema axiomático esteve estreitamente ligada à geometria de Euclides e, em particular, aos problemas suscitados pelo axioma V, aquele das paralelas. Durante mais de vinte séculos se discutiu se esse axioma era ou não evidente, sem que nenhuma das partes chegasse a uma conclusão definitiva. A solução desse problema foi obtida – como em tantos outros casos – simplesmente abandonando os pressupostos sobre os quais se assentava a noção clássico-aristotélica. Com efeito, para que um axioma seja ou não evidente, ele deve ser primeiramente um enunciado, uma vez que somente os enunciados podem ser verdadeiros, com ou sem evidência. Uma vez que se abandona esse pressuposto, toda a discussão duas vezes milenar perde seu sentido. Mas, entretanto, é preciso conferir aos axiomas um estatuto lógico que, excluída a possibilidade de que entre em jogo a sua evidência, seja compatível com as relações dedutivas que ele deverá integrar. Caso contrário, ainda que não sejam mais expostos às dificuldades suscitadas pelo problema de sua evidência, os axiomas serão totalmente inúteis para a construção dedutiva de uma ciência.

Como é sabido, a solução foi constituída através de um processo histórico que nos leva de Euclides a Hilbert (este último publicou em 1899 seus *Grundlagen der Geometrie*). É muito fácil descrever sistematicamente a transformação efetuada. Por exemplo, estando dado o axioma: "Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta", é preciso substituir as constantes extralógicas "ponto", "reta" e "passar" por variáveis como "*p*" "*r*" e "*PA*", de onde a função proposicional: "por dois *p* distintos *PA* uma e somente uma *r*" ("*p*" e "*r*" podem tomar valores de indivíduos em categorias semânticas distintas, e "*PA*" o valor de uma relação entre indivíduos dessas categorias semânticas). Dessa maneira, nós obtemos uma função proposicional, quer dizer, uma expressão que não é nem verdadeira nem falsa, mas que pode se transformar num enunciado verdadeiro ou falso quando nós substituímos de novo suas variáveis extralógicas pelas constantes adequadas.

Notemos que, graças a essa transformação de axiomas em funções proposicionais, as duas primeiras exigências da noção clássico-aristotélica perdem seu sentido: as variáveis não podem ser veículo de nenhuma referência ontológica nem de uma homogeneidade correspondente, a não ser aquela contida na categoria semântica à qual elas pertencem (indivíduo, classe, relação, função etc.). Daqui se segue que muitos autores, e particularmente Husserl, falaram, neste caso, de uma ontologia formal como resíduo último dessa exigência. Contudo, o verdadeiro *Ersatz* (substituto) da referência e da homogeneidade ontológica, nós o devemos procurar, ao contrário, na categoricidade de certos sistemas hipotético-dedutivos, quer dizer, no fato de que dois modelos ou realizações distintas de um mesmo sistema hipotético-dedutivo são isomorfos.

Mas essa categoricidade, que é o verdadeiro fundamento da noção, muito confusa em si, de ontologia formal não é uma propriedade necessária dos sistemas hipotético-dedutivos, mas antes um *desideratum* dificilmente acessível. A teoria dos grupos, por exemplo, considerada como um sistema hipotético-dedutivo, não é nem pretende ser categórica e, por outro lado, o estado atual das pesquisas sobre os fundamentos nos torna muito céticos quanto à possibilidade de construir sistemas hipotético-dedutivos categóricos (os sistemas de Zermelo-Fraenkel ou Von Neumann-Gödel não o são, e tal é o significado mais importante das descobertas recentes de Cohen[5]).

Junte-se a isso que a exigência de evidência perde seu sentido porque, se bem que a formulação dos axiomas como funções proposicionais e não como enunciados sejam motivadas por verdades mais ou menos evidentes de um certo domínio ontológico, essas evidências pré-axiomáticas não são integradas como pressupostos explícitos dos sistemas hipotético-dedutivos.

Lembremos, além disso, que, na imensa maioria dos casos, essa evidência pré-axiomática se refere a, e surge somente em, um domínio limitado da experiência ou do conhecimento, de tal sorte que, para que se possa a partir dela realmente motivar a escolha dos axiomas, é necessário antes de tudo extrapolá-la para domínios muito distantes do modelo original. O axioma de continuidade em geometria, para tomarmos um exemplo relativamente simples, pela utilização de variáveis no lugar de constantes extralógicas, não somente exprime uma estrutura racional abstrata e dessa forma se separa de toda evidência pré-axiomática que poderia lhe servir de fundamento, mas adicionalmente, pela generalidade própria de seu conteúdo, ele mostra como as evidências pressupostas, que tradicionalmente depõem a seu favor, não são nada menos que insuficientes para exprimir seu conteúdo. Nascidas das experiências visuais de nosso campo perceptivo, e relativas a este ou ainda nascidas de um sistema de referência de grandeza média, essas evidências devem ser extrapoladas para a totalidade do espaço, do macroscópico ao microscópico. E é nessa necessidade de uma extrapolação primeira que os sistemas hipotético-dedutivos têm mostrado a falibilidade da atitude clássico-aristotélica. Nós podemos falar com razão de uma dupla crítica da evidência nos sistemas hipotético-dedutivos: uma puramente negativa que se efetua pela passagem dos enunciados às funções proposicionais, e outra mais construtiva, do ponto de vista gnoseológico, que se efetua ao mostrar a incomensurabilidade entre o que essas evidências são e o que elas pretendem ser.

Talvez esse problema da eliminação da evidência torne-se mais claro [se contrastarmos] o método axiomático, tal como se apresenta nos sistemas hipotético-dedutivos, ao método genético. Este último, utilizado de modo preponderante pelos gregos e canonizado dois milênios depois por Kant como o método matemático por excelência, opera por meio de certos processos construtivos de base que se aplicam em princípio aos elementos considerados como dados e que reaplicamos em seguida aos elementos obtidos. Dessa maneira, não só os objetos do domínio teórico a ser estudado, mas igualmente suas propriedades e relações nesse domínio, são engendrados por tal construção. Mesmo as formas mais complexas de construção teórica adquirem desse modo um sentido concreto e uma evidência possante. Por exemplo, é assim que nós construímos os números naturais a partir de zero ao aplicar por iteração a operação elementar de construção do sucessor; da mesma maneira, o método de demonstração por indução completa – tão característico da aritmética elementar – permite demonstrar que todos os números naturais possuem uma certa propriedade, mostrando, primeiramente, que zero a possui, e depois que a propriedade é herdada por todo sucessor de todo número natural. Como se vê, a estrutura ontológica de um certo domínio de objetos, a distribuição de qualidades e de relações entre eles e os métodos de demonstração requeridos para a sua demonstração provêm todos das particularidades de um certo processo construtivo.

Em um sistema hipotético-dedutivo ocorre exatamente o contrário. Aqui nós encontramos aquilo que Hilbert chama de dedução axiomática existencial, que consiste em formular um número finito de axiomas – de funções proposicionais – sem conteúdo ontológico determinado (dada a ausência de constantes extralógicas). Esses axiomas descrevem uma estrutura abstrata, mas, como na maior parte dos casos, eles não são categóricos; a descrição dessa estrutura não é exaustiva e deixa largas margens de variabilidade para os possíveis modelos dessa estrutura.

Em seguida, por meio de deduções lógicas realizadas operando com o significado das expressões lógicas (constantes e variáveis) que compõem esses axiomas, obtêm-se as conseqüências lógicas dos axiomas. O verdadeiro conteúdo teórico do sistema hipotético-dedutivo consiste em afirmar que, se um domínio de objetos possui as qualidades e as relações que satisfazem os axiomas – quer dizer, se as expressões que traduzem essas qualidades e relações são colocadas no lugar das variáveis extralógicas do sistema hipotético-dedutivo, transformando seus axiomas, que são as funções proposicionais, em enunciados verdadeiros –, então eles satisfarão igualmente as conseqüências lógicas desses axiomas.

Tanto o problema de saber se um domínio de objetos possui as qualidades e relações que satisfazem os axiomas quanto o de determinar quais são os instrumentos teóricos para provar qual é a natureza dos objetos que formam o domínio mencionado etc. são deixados de lado pela axiomática, que se concentra somente na análise do conhecimento dedutivo, o "se então" que liga os axiomas às suas conseqüências. Esta *Wenn ... so Mathematik*, como a chama Scholz, não será para Aristóteles uma verdadeira ciência porque os axiomas não são enunciados necessários, eles nem mesmo são enunciados; para o Estagirita tratar-se-ia de um simples jogo dialético.[6] Na expressão "dedução matemático-existencial", o vocábulo existencial vem acentuar a suposição em bloco, a exclusão de todos os problemas de gênese ou de construção, de um domínio de objetos. Em contraposição, a expressão "sistema hipotético-dedutivo" quer exprimir que os axiomas não se comportam como enunciados, mas como suposições de um processo dedutivo ulterior.

Das quatro características que nós assinalamos com respeito à concepção clássico-aristotélica, os sistemas hipotético-dedutivos deixam de lado as duas primeiras, mas conservam intactas as duas últimas. A exigência de finitude é satisfeita pela existência de axiomas e pelo fato de que eles são em número finito. E a lógica permanece implícita; nós nos servimos dela, mas não a tematizamos. Foram precisamente os problemas ligados ao caráter implícito da lógica que conduziram a uma revisão fundamental dos sistemas hipotético-dedutivos.

## Os sistemas formais

No nível da noção clássico-aristotélica, esse caráter implícito não deu lugar a sérios problemas por diversas razões.

Em primeiro lugar, a referência ontológica imediata dos axiomas e dos teoremas agia como guia no controle da correção das inferências lógicas. Apesar de a utilização de desenhos e esquemas constituírem uma violação aos princípios dos *Elementos* de Euclides, eles de fato operaram como instâncias justificadoras das deduções. Em segundo lugar, Aristóteles opera sempre com deduções individuais; se bem que em B.2 (e em C.2) ele deva utilizar a noção de todas as conseqüências lógicas que se seguem dos axiomas, este problema não se coloca tematicamente. Mas nos sistemas hipotético-dedutivos essas duas circunstâncias atenuantes não podem mais intervir: formulando os axiomas como funções proposicionais, ganha-se uma certa liberdade na elaboração das hipóteses, liberdade somente restringida pelo perigo da inconsistência e que nos afasta definitivamente de um controle experimental. No entanto, muitos dos conceitos fundamentais da teoria de sistemas hipotético-dedutivos, como aqueles de categoricidade e de consistência, exigem que se opere com a totalidade das conseqüências lógicas que se seguem dos axiomas. (Por exemplo, no caso da consistência, é preciso que não figure nenhuma contradição elementar na totalidade mencionada.) A despeito, pois, do caráter implícito da lógica, os sistemas hipotético-dedutivos não podem, como na noção clássico-aristotélica, prescindir de uma análise e de uma definição geral do conceito de conseqüência lógica. É então habitual utilizar o que se chama a definição de Tarski-Bolzano que diz: uma conclusão *C* é conseqüência lógica de uma premissa *P*, se todo modelo de *P* é igualmente modelo de *C*. Essa definição está de acordo com a prática dos lógicos e matemáticos. Por exemplo, quando Aristóteles quer demonstrar que um silogismo não é válido, ele constrói um modelo das premissas que não é um modelo da conclusão (*Analytica Priora*, 1, 4, 26 a 2). Mas para formular claramente e aplicar essa definição de conseqüência lógica em toda a sua generalidade, é necessário dispor do conceito de todos os modelos de uma certa função proposicional, e isto nos conduz diretamente à teoria dos conjuntos. Se nós nos lembrarmos que, no fim do século [XIX], essa teoria foi abalada em seus fundamentos pela descoberta dos paradoxos, e que seus pressupostos ontológicos exorbitantes[7] têm despertado sempre a desconfiança dos filósofos, dos lógicos e dos matemáticos, nós não podemos nos surpreender com o fato de alguém ter tratado de reconstruir os sistemas hipotético-dedutivos sobre bases mais modestas e, portanto, mais sólidas.

Visto de fora e em linhas gerais, o processo tem sido o seguinte: nos sistemas hipotético-dedutivos, a formalização se limita à introdução de signos especiais para as variáveis que substituem as constantes extralógicas. Se bem que, no fundo, não seja estritamente necessário, isto é útil para distinguir dois níveis de funcionamento da linguagem: aquele das variáveis extralógicas, regido exaustivamente pelos axiomas, e aquele do resto da linguagem empregada, que opera como veículo da razão lógica. Esta não opera com signos, mas através deles, ou melhor dizendo, com seus significados. Esclarecendo: os sistemas hipotético-dedutivos mais importantes recorrem aos meios mais diversos para diferenciar esses dois níveis. Por exemplo, o sistema de axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo (1907) quase não utiliza signos especiais; ao contrário, aquele de Gödel (1938) emprega os signos da logística. Mas os dois sistemas são idênticos no seguinte aspecto: os signos lógicos, sejam eles expressões da linguagem usual (em Zermelo) ou os signos da logística (em Gödel), são utilizados em razão de seus significados e não regidos, como nos sistemas formais, por regras operatórias.[8] E isso é fundamental para qualificar esses dois sistemas como sistemas hipotético-dedutivos. Ora, é claro que os sistemas formais avançam esse processo de formalização explicitando a lógica que permanecia implícita nos sistemas hipotético-dedutivos, mediante a formulação de axiomas lógicos específicos e de regras de dedução lógica. Para não ter de fazer nenhum apelo ao sentido dos signos em um raciocínio, as regras lógicas de dedução contêm simplesmente as diretivas elementares que prescrevem a maneira de manipular os signos independentemente de sua significação possível. Assim, as formas do pensamento lógico são reduzidas, nos sistemas formais, a um mínimo sem o qual parece impossível de empreender qualquer tentativa de organização teórica da nossa experiência: a identificação e a discriminação dos signos e das seqüências finitas desses signos, a aplicação correta das regras elementares para a manipulação etc. Note-se que, ao passar da noção clássico-aristotélica àquela dos sistemas hipotético-dedutivos, abandonam-se as evidências materiais, retendo-se somente as evidências lógico-formais, e que agora, nessa terceira etapa, conserva-se destas somente um resíduo mínimo, indispensável para levar a seu termo qualquer tipo de conhecimento teórico. Isto quer dizer que, quanto mais pobres são as evidências utilizadas, mais sólido é o edifício teórico construído sobre elas.

Como se sabe, um sistema formal contém as seguintes partes: 1) um conjunto de signos – de fato eles podem ser objetos quaisquer, mas nós falamos de signos antecipando a interpretação que podemos lhes dar depois – com um procedimento efetivo para determinar se um signo pertence ou não a este conjunto; 2) um conjunto de "axiomas" – nós empregamos as aspas para sugerir que se trata de uma seqüência de signos sem nenhuma significação – com um procedimento para determinar se lidamos com um axioma ou não; e 3) um conjunto de regras de dedução com um procedimento efetivo para determinar em cada caso concreto se uma regra foi corretamente aplicada, o que exclui, entre outras coisas, a utilização de regras baseadas em uma infinidade de premissas. É claro que é possível, graças a essas determinações, gerar efetivamente, por meio de um procedimento inteiramente elementar operando sobre os signos, primeiramente os axiomas e depois, pouco a pouco, um após outro, todos os teoremas de um sistema formal. É aqui que salta aos olhos a diferença radical com relação aos sistemas hipotético-dedutivos: nestes últimos nós temos igualmente os teoremas que são conseqüência lógica dos axiomas, mas essa noção de conseqüência lógica definida por referência à totalidade dos modelos faz uso de graus muito elevados de infinito. Lembremo-nos de que se um domínio de objetos é denumerável, o conjunto das classes de seus elementos já tem a cardinalidade do contínuo. Ao contrário, nos sistemas formais, nós não temos necessidade de ir mais além do que a forma mais simples e intuitivamente mais direta do infinito, a única aceita por Aristóteles: o infinito gerado por um procedimento elementar aplicado por iteração e que produz sempre novos objetos.

Nós vemos igualmente dessa maneira que os sistemas formais constituem uma síntese do método genético e do método hipotético-dedutivo. Do primeiro eles tomam o processo efetivo de geração progressiva de axiomas e teoremas; do segundo, eles tomam emprestado a suposição, em bloco, da existência dos domínios de objetos, de propriedades e de relações que constituem os modelos dos “axiomas”. Aqui a noção de modelo é um pouco mais complexa que nos sistemas hipotético-dedutivos, porque é preciso não somente dar uma interpretação às variáveis extralógicas mas igualmente a todos os signos lógicos dos quais dispõe o sistema formal. Notemos igualmente que essas particularidades dos sistemas formais esclarecem todo o processo de simbolização, de algebrização, de redução da teoria de coisas à teoria de signos (Lambert) e de exclusão da significação que caracteriza a evolução das ciências exatas nos tempos modernos. Todo esse processo muito complexo, qualquer que seja o nome que lhe damos, culmina nos sistemas formais que são sua finalidade adequada. É claro que se considera que a causa desse processo tenha sido uma certa atitude filosófica, o nominalismo, ou simplesmente o desejo de evitar os erros e de desembaraçar nosso pensamento da pesada tarefa de pensar as significações, fazendo-lhe manipular somente os signos dessas significações. Nós não duvidamos da verdade dessas explicações, mas, no fundo, elas operam no interior de um campo teórico muito mais vasto. A causa de todo esse processo foi pura e simplesmente o desejo, essencial a toda forma de conhecimento, de reduzir o complexo ao simples e, nesse caso, de reduzir a infinidade do significado à finitude do signo. Somente a "coisificação" generalizada dos significados, expressa sob diversas formas por todas as escolas filosóficas do nominalismo ao platonismo, tem escondido essa infinitude e tem deformado o sentido verdadeiro de todo o processo de simbolização. Aqui, de uma parte Wittgenstein, por sua crítica da mitologia da unidade das significações, e de outra parte os sistemas formais, por seus sucessos teóricos incríveis, nos ajudam a situar o problema em um quadro muito mais vasto.

Nós vimos que os sistemas formais se caracterizam precisamente pelo abandono da terceira característica da noção clássico-aristotélica: a lógica subjacente torna-se explícita. (Esclarecimento: por certo, na metateoria associada a um sistema formal, a lógica sob forma implícita reaparece, mas o que é essencial é que, graças à cisão rigorosa entre sistema formal e metateoria, pode-se exprimir ao máximo a lógica do sistema.) Por sua vez, a quarta característica, a exigência de finitude, é conservada e adquire um significado verdadeiramente crucial. Lembremo-nos de que Aristóteles exigia que toda demonstração de um teorema fosse feita em um número finito de etapas e terminasse por axiomas considerados como evidentes. Não obstante essas grandes diferenças, nós reencontramos a mesma situação nos sistemas formais: uma demonstração é uma configuração finita de signos construída a partir de axiomas por meio de aplicação de "regras de dedução". Mas, além disso, a justificação de cada uma das etapas de construção se opera de maneira finita, graças ao caráter efetivo das noções de axiomas e regras de dedução. Trata-se, pois, de um processo suscetível de uma explicação analítica exaustiva, ou como disse o diabo a José: "Este é um livro que não é preciso saber ler para ler". Pode-se falar com razão de uma objetivação total da razão lógica nos sistemas formais. Em Aristóteles, ao contrário, pela falta de explicação da noção de conseqüência lógica, motivada em última instância pela aceitação das significações das expressões lógicas como unidades ideais dadas, a exigência de finitude não pode ter um tal rigor. Expressando em termos aristotélicos: o Estagirita exclui das demonstrações o infinito por composição (κατα προσθεσιν), mas não o infinito por divisão (κατα διαιρεσιν).[9] A exclusão deste último é o verdadeiro ganho realizado pelos sistemas formais, quer dizer, o meio que permitiu conferir um caráter finito e elementar ao pensamento teórico.

De um ponto de vista geral, se consideramos os sistemas formais como ensaios de redução dos pressupostos ontológicos relativos ao infinito, o que deve nos surpreender não é o conhecido fato de suas limitações, mas sim seus resultados múltiplos e significativos. Ou, mais concretamente: o que surpreende não é o teorema da incompletude de Gödel, mas seu teorema de completude da lógica quantificada. Nesse sentido, não é por acaso que as principais demonstrações de limitação de sistemas formais utilizam como ferramenta de base o argumento da diagonal, por meio do qual Cantor demonstrou a existência de uma hierarquia de graus no infinito.[10]

## Sistemas não aristotélicos

É bem conhecido que algumas das limitações dos sistemas formais – pois nem todas, mas algumas, indecidibilidade por exemplo, são absolutas – são superadas, deixando de lado a exigência segundo a qual as noções de axiomas e regras de dedução são efetivas. O caso mais simples, e o primeiro que vem à mente, é aquele dos sistemas chamados semiformais, nos quais as regras de dedução apóiam-se em uma infinidade de premissas e são, por conseguinte, regras não-efetivas. Nesses sistemas semiformais, existem demonstrações que são configurações infinitas de signos (infinidade por composição) e que, por conseguinte, violam a exigência aristotélica de finitude. Nós não podemos considerar essas demonstrações como formas exaustivas de análise de uma conexão dedutiva, uma vez que elas nos dão menos informação sobre esta última do que as demonstrações finitas.[11] Este é precisamente o preço que nós devemos pagar para evitar as limitações.

Com esses sistemas semiformais, e em geral com todas as teorias formalizadas que possuem noções de base não-efetivas, nós abandonamos a quarta e última característica aristotélica. Os sistemas teóricos resultantes dessa mudança, a despeito de sua extraordinária importância e de sua necessidade, em razão das limitações dos sistemas formais, representam uma verdadeira ruptura com a tradição clássico-aristotélica, precisamente pelo abandono da exigência de finitude. Esta última parece ser, à luz dos cortes sincrônicos efetuados, o núcleo do pensamento aristotélico. Com os sistemas teóricos não-aristotélicos, nós abandonamos também, não sem pesar, o mito amplamente admitido em filosofia – e mesmo na filosofia contemporânea – da possibilidade de uma objetivação total e exaustiva de nosso pensar lógico. Em suma, a razão lógica não é comparável a este livro "que não é preciso saber ler para ler" como indica o oferecimento profundo e catastrófico do diabo a José, mas se compara aos nossos livros usuais que nos fornecem muitos conhecimentos novos, mas dos quais a leitura pressupõe o domínio de muitos outros. Não existe, pois, um começo do zero, nem um grau absoluto de racionalidade lógica – se bem que essa idéia nos seja tão cara. Valeria a pena, à luz desses resultados, analisar as polêmicas entre o pensamento analítico e o pensamento dialético; uma grande parte da discussão se revelaria ilusória.

Mas há uma outra maneira, oposta à precedente, de abandonar a exigência de finitude. Wittgenstein esboçou uma via – nós não podemos falar de uma elaboração detalhada nem dele nem em nenhum de seus comentadores – nas *Philosophical Investigations* e nos *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Ele começa por criticar as noções conjuntistas de infinito atual e a extensão a esses conjuntos dos métodos usuais de análise dos conjuntos finitos. Aqui, Wittgenstein repete argumentos conhecidos, utilizados pelos intuicionistas para criticar a noção de infinito atual – argumentos que se movem na mais estrita ortodoxia aristotélica.[12] Mas, em seguida, Wittgenstein vai mais longe, até rejeitar a noção mesma de demonstrabilidade efetiva que os intuicionistas consideram, através do paradigma da seqüência dos inteiros naturais, como uma intuição *a priori* do pensamento matemático. Bem de acordo com seu estilo particular, ele não formula os problemas com essa generalidade, mas se orienta nessa direção, com ajuda de exemplos muito bem escolhidos.

Wittgenstein toma sistemas de regras (de definições indutivas) do tipo

R1) 2
R2) $a \rightarrow a+2$,

que permitem gerar (enumerar) efetivamente os conjuntos de números (neste caso o conjunto dos números pares), e que têm sido utilizados abundantemente na literatura – sobretudo ultimamente por Lorenzen[13] – para mostrar a impossibilidade de aplicar a um conjunto em devir as categorias habituais dos conjuntos finitos (por exemplo, a decidibilidade). Ora, Wittgenstein rejeita não somente a concepção desse conjunto de números como um objeto fechado, mas ainda a idéia segundo a qual esse conjunto de números, que não é fechado, seja ao menos gerado por um *procedimento de produção aberta, único e bem determinado,* que conserva sua identidade ao longo das aplicações repetidas e sucessivas das regras no tempo. Os intuicionistas contestam a idéia de que um conjunto de números gerados por um sistema de regras deva ser considerado como um objeto fechado e bem determinado, mas eles admitem sem hesitação que o procedimento que os gera seja fechado e determinado; Wittgenstein recusa isto também. (Wittgenstein escolhe para esse fim sistemas de regras tão simples que os conjuntos que eles geram não podem nem mesmo servir para ilustrar as críticas intuicionistas – em nosso exemplo, o conjunto de números pares é recursivo – porque seu objetivo é o de analisar o procedimento de geração, e que, por isso, como ele nota com ironia nas *Philosophical Investigations*, I, 214, o procedimento que gera sempre o mesmo objeto é suficiente.) Nós chegamos a essa idéia tão paradoxal pela rejeição da idéia da significação de uma regra – e em geral de uma expressão qualquer de uma língua qualquer – como uma unidade ideal, bem determinada e numericamente passível de repetição. Para Wittgenstein, a significação de uma regra ou de uma expressão é o uso que delas fazemos, e como esse uso é sempre uma parte finita do comportamento humano, não há nada na regra que possa determinar *ad infinitum* o que ela prescreve para uma aplicação finita qualquer. Suponhamos que nós tenhamos chegado ao número 80, então nós podemos seguramente, estando dada *R2*, escrever 83, porque toda aplicação de uma regra é para Wittgenstein um ato de criação. Esse hiperfinitismo conduz a um hiperconvencionalismo, ou melhor dizendo, a um decisionismo segundo o qual mesmo as formas mais visivelmente restritivas se transformam em decisões arbitrárias. Parece-nos difícil que se possa dessa maneira desenvolver um dia uma teoria coerente e satisfatória do conhecimento teórico. Mas, a despeito de sua esterilidade, nós não poderíamos simplesmente lançá-la fora, porque os problemas filosóficos que ela coloca existem e requerem uma solução. Wittgenstein luta contra a "coisificação" de regras em mecanismos ideais "sem fricção", e que jamais quebram ou entortam.[14] Ele luta igualmente contra a idéia intelectualizada segundo a qual, apesar de as expressões com as quais descrevemos a regra serem escritas sobre um papel, a regra em si é desdobrada com toda a sua infinidade de aplicações em nosso espírito. E como ele não encontra nenhum esquema filosófico satisfatório que explique o estatuto ontológico das regras, ele as pulveriza na infinidade não-conexa dos contextos de suas aplicações. Nós nos perguntamos por vezes se, utilizando uma expressão de Church no sentido kantiano, nós não deveríamos falar diante dos problemas levantados por Wittgenstein de uma "necessidade (transcendental?) dos objetos abstratos".

Mas deixemos esse assunto que mereceria por si só uma análise detalhada e investiguemos que lugar ocupa a concepção de Wittgenstein na seqüência de cortes sincrônicos que nós fizemos. Enquanto os sistemas semiformais e, em geral, as teorias formalizadas não-efetivas abandonam *por excesso* a exigência clássico-aristotélica de finitude, Wittgenstein a abandona *por falta*. Nós vimos que a passagem dos sistemas hipotético-dedutivos aos sistemas formais foi motivada em última instância pela redução do transfinito ao efetivamente denumerável (lembremo-nos de que, graças ao método da aritmetização de Gödel, as noções de sistema formal e conjunto efetivamente denumerável de números naturais são equivalentes). Duas possibilidades opostas se apresentam agora: sobrepassar o efetivamente denumerável abrindo a porta às noções não-efetivas e aceitando dessa maneira graus mais complexos de infinito; ou restringir limitando ainda mais o finito àquilo que o homem realmente faz, ao calculado e inferido (Hao Wang, nesse caso, fala com razão de antropologismo). Essas duas soluções são não-aristotélicas, porque todas as duas violam, cada uma à sua maneira, a exigência de finitude. O texto seguinte, de Heinrich Scholz (*Die Axiomatik der Alten*, p. 32), se bem que tenha perdido seu caráter de atualidade, descreve a situação com o rigor tão característico de seu estilo:

> Graças a esse finitismo inflexível, Aristóteles tornou-se o teórico da ciência, teórico do qual é preciso colocar o mérito tanto mais alto quanto são mais profundas as obscuridades nas quais Hegel e os neokantianos caíram por suas críticas irresponsáveis desse finitismo aristotélico. Se amanhã existir uma ciência rigorosa, o αναγκη σθηναι, (é necessário parar) de Aristóteles será um de seus fundamentos. E se amanhã existir uma axiomática, ela repetirá o texto aristotélico (*Analytica Posteriora*, I, 24, 86a, 5): “Os enunciados dos quais a demonstração exige um número infinito de premissas não são demonstráveis; eles são demonstráveis somente quando um número finito de premissas é suficiente”.

Scholz não podia prever – ele escreveu isto em 1930 – que dois lógicos austríacos, Gödel e Wittgenstein, um em Viena e o outro em Cambridge, forjavam então os primeiros elos de uma crítica geral do finitismo aristotélico. Se ele as tivesse conhecido, suas próprias críticas com relação a Hegel e aos neokantianos teriam sido menos severas.

## Apêndice

### A noção de sistema axiomático em Husserl

Assinalemos primeiro que uma informação deficiente deu lugar, freqüentemente, a erros muito graves na apreciação da natureza e da compreensão do saber teórico. Formado na matemática do fim do século XIX, Husserl conhecia muito bem a concepção clássico-aristotélica dos sistemas axiomáticos; contudo, ele é também um adepto entusiasta dos sistemas hipotético-dedutivos, o que muitos fenomenólogos parecem ignorar. Husserl não vê nesses sistemas nada menos do que o acabamento da lógica como disciplina teórica.[15] A terminologia de Husserl não é aquela que se tem o costume de utilizar. Em lugar dos sistemas hipotético-dedutivos, ele fala de teoria das multiplicidades (*Mannigfaltigkeitslehre*), termo que ele empresta de Cantor e que é, sem dúvida, muito bem escolhido porque se relaciona aos modelos possíveis dos sistemas hipotético-dedutivos. Da mesma maneira Husserl nos fala de formalização para se referir à passagem da noção clássico-aristotélica àquela dos sistemas hipotético-dedutivos, enquanto o usual é o contrário: empregar esse termo para designar a passagem destes últimos aos sistemas formais.

Husserl observa igualmente – e foi com Hilbert um dos primeiros a fazê-lo – que os sistemas hipotético-dedutivos são particularmente interessantes quando são categóricos (quer dizer, completos) ou, como Husserl o diz, quando a multiplicidade correspondente é definida ou matemática.[16] Mas Husserl não somente acentuou a importância dos sistemas hipotético-dedutivos para a metodologia das ciências, ele igualmente levantou com muita sagacidade o problema de saber se a subjetividade transcendental podia ser considerada como uma multiplicidade definida, quer dizer se a fenomenologia podia ser desenvolvida por meio de um sistema axiomático categórico (e completo). Sua resposta é negativa;[17] e se bem que os argumentos que ele utiliza não sejam aceitáveis, o paralelismo com o teorema da incompletude de Gödel salta aos olhos.

Igualmente característico da concepção husserliana e decisivo para a evolução ulterior de suas idéias: o fato de que Husserl, ainda que ele distinga claramente a noção clássico-aristotélica dos sistemas hipotético-dedutivos, não admite que os segundos possam suplantar totalmente os primeiros. Trata-se para Husserl de "estruturas" teóricas distintas que possuem sua própria justificação e seu próprio campo de aplicação na ciência.[18] Como ele aceita a existência de axiomas (enunciados) evidentes fundados sobre um *a priori* material, os sistemas hipotético-dedutivos constituem para ele somente uma ontologia formal que se desenvolve paralelamente às ontologias regionais (materiais). Mas o processo histórico real que conduziu da concepção aristotélica aos sistemas hipotético-dedutivos surgiu, ao contrário, da crise do *a priori* (material); e os sistemas hipotético-dedutivos instauraram uma nova concepção dos princípios da ciência: estes últimos não são verdades evidentes e absolutas por si mesmos, mas pressupostos teóricos muito gerais dos quais não é preciso buscar a justificação neles mesmos ou em sua suposta evidência, mas em sua capacidade de organizar teoricamente o domínio aberto e dinâmico da experiência e da *praxis* científica. Essa concepção moderna da natureza dos princípios da ciência é totalmente estranha a Husserl, malgrado seu entusiasmo pelos sistemas hipotético-dedutivos: Husserl não os liga à dinâmica do conhecimento científico, mas à estática da ontologia formal.

Todavia, e ainda que isso constitua uma séria limitação da concepção epistemológica de Husserl, é em sua atitude com relação aos sistemas formais que nós encontramos as maiores dificuldades. Por um lado, as *Ideen I* (publicadas em 1913) são o último livro de Husserl no qual ele se mostra informado das pesquisas sobre os fundamentos. Por essa razão, ou Husserl não a conheceu, ou a conheceu mas sem analisar longamente a teoria amadurecida dos sistemas formais desenvolvida por Hilbert e sua escola a partir de 1918 (data da publicação do artigo de Hilbert: "Axiomatisches Denken"). As críticas aos sistemas formais, breves e disparatadas em toda a obra de Husserl,[19] não ultrapassam o nível teórico das objeções mordazes de Frege contra os primeiros ensaios de construção dos cálculos matemáticos do fim do século XIX. Contudo, com uma diferença: as objeções de Frege, se bem que elas nos pareçam hoje exageradas, eram corretas para a sua época porque elas atacavam os ensaios de formalização bastante fracos, falhos em seu fundamento.

Mas, no entanto, o que mais surpreende em Husserl é sua incapacidade de compreender a verdadeira significação do processo histórico das ciência exatas, que começa com a introdução de símbolos na álgebra e termina pelos sistemas formais.[20] Os qualificativos que Husserl emprega para se referir a esse processo falam por si próprios: *Sinnesveräusserlichung*, *Entleerung des Sinnes*, *Sinnentleerung der mathematischen Naturwissenschaften in der Technisierung*, *Sinnverschiebungen*, *Ideenkleid* etc. Husserl vê aqui um tipo de calamidade teórica, de enfermidade progressiva da razão, que, sem perigo em seu começo, ameaça corromper e destruir toda a ciência, perdendo de vista as evidências originais que fundam as verdades científicas, envolvendo-se na confusão dos sucedâneos simbólicos.

Isto quer dizer que os filósofos e historiadores contemporâneos que consideram sem preconceito esse processo chegam a resultados bem diferentes. Em resumo: somente graças ao processo de simbolização que termina com os sistemas formais é que a razão teórica pôde conhecer sua estrutura última, detectar seus próprios limites e mesmo conceber os meios para os ultrapassá-los. A idéia husserliana de uma degradação crescente da razão teórica deforma todo o problema, porque ela não vai ao coração desse problema: as diversas formas de infinito e a ambição de reduzi-las à mais simples dentre elas, o efetivamente demonstrável.

Infelizmente, a tese de Husserl foi reprisada e generalizada por Heidegger com sua identificação da ciência moderna à técnica de dominação e controle da natureza, e daqui se estendeu para grande parte da filosofia continental européia. Sem cair evidentemente numa adoração servil da ciência, nós cremos que uma das tarefas da filosofia atual é a de substituir as teses filosófico-históricas de Husserl e de Heidegger por bases teóricas mais sólidas.

O trabalho que se acaba de ler não é mais do que um esboço nessa direção.

## Notas

1. Este texto foi originalmente publicado em *L'Âge de la Science*, Paris, v. III, n. 3, p. 207-224, 1970.
2. Cf. Arpad Szabo. Anfange des euklidischen Axiomensistems. *Archive for history of exact sciencies*, v. 1, n. 1, p.72 e 104.
3. Cf. Heinrich Scholz. *Mathesis Universalis*, Darmstadt, 1961, p. 27 e seguintes. Igualmente no *Blätte für Deutsche Philosophie*, v. 4,1930/ 1931. O livro de E. Beth, *The fondations of Mathematics* contém também uma excelente exposição das idéias de Scholz.
4. Cf. *Analytica Posteriora*, I, 5.
5. Cf. Andrej Mostowski. Recent results in set theory. *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Edited by I. Lakatos. Amsterdam, 1967.
6. Cf. Scholz, op. cit., p. 42.
7. Cf. Willard van Orman Quine. *Set theory and its logic*. Cambridge, 1969. Quine insiste veementemente sobre os pressupostos ontológicos da teoria dos conjuntos.
8. A lógica subjacente dos sistemas de Zermelo e de Gödel é aquela do cálculo de predicados de primeira ordem, pois esses sistemas podem ser inteiramente formalizados. Mas essa é uma outra questão.
9. Cf. *Physique*, III, Iv. 204a e Jules Vuillemin. *Da lógica à teologia*, Paris, 1967, p. 134 e ss.

10. Cf. Jules Vuillemin, sobre as condições que permitem utilizar as matrizes russelianas das antinomias..., *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. VII, n. 1, 1966.
11. Kurt Schuette, *Beweistheorie*, Berlin, 1960, p. 193.
12. *Physique* III. Igualmente Oscar Becker em *Mathematische existenz, Jahrbuchfür philosophie und phänomenologische Forshung*, v. III, 1927, analisa a posição intuicionista de Aristóteles.
13. Cf. Paul LORENZEN, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin, 1955, p. 13 e ss.
14. Cf. *Philosophical Investigations*, Oxford, 1958, par. 193 e ss.
15. Cf. *Formale und Transzendentale Logik*, Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung, v. X, par. 35, nota 1.
16. Cf. *Logische Untersuchungen*, v. I, par. 69; *Ideen*, I, par. 72 a 75, par. 9, f. Krisis der Europäischen Wissenschaften und Transzendentale Phänomenologie, *Formale und Transzendentale Logik*, par. 28 a 36.
17. *Ideen*, I, par. 73.
18. *Krisis*, p. 56, linha 25.
19. Por exemplo: *Formale und Transzendentale Logik*, par. 33 e 34; *Krisis*, p. 46, linha 5.
20. *Krisis*, p. 43, linha 25, é típica dessa incapacidade.