

Uma demonstração geométrica do teorema dos quatro vértices

A geometric proof of the four vertex theorem

Ronaldo Alves Garcia ^{*}
Mário Jorge Dias Carneiro [†]

Resumo:

Nesse trabalho, apresentamos uma demonstração geométrica do teorema dos quatro vértices para curvas estritamente convexas no plano.

Palavras-chave: Curvatura. Convexidade. Vértices.

Abstract:

In this paper, we present a geometric proof of the four-vertex theorem for strictly convex curves in the plane.

Keywords: Curvature. Convexity. Vertices.

MSC-Classification: 51M04

1 Introdução

Um dos resultados clássicos da teoria das curvas planas é o Teorema dos Quatro Vértices que remonta ao início do séc. XX. Em 1909 Syamadas Mukhopadhyaya [9] provou o teorema para curvas estritamente convexas no plano, e em 1912 Adolf Kneser [7] provou o teorema para todas as curvas regulares simples e fechadas no plano.

Para uma apresentação desse teorema e a sua recíproca veja [1], [2], [3] e [4]. Os vértices de uma curva plana correspondem aos pontos de máximo e mínimo

*Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística,

 <https://orcid.org/0000-0001-8876-6956>, ragarcia@ufg.br

†Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Matemática,

 <https://orcid.org/0000-0003-2278-0784>, carneiro@mat.ufmg.br

local da sua curvatura Euclideana. Esses pontos correspondem a um contato mais degenerado do círculo osculador com a curva. Relembramos que o círculo osculador de uma curva plana é o círculo tangente à curva que possui contato de ordem maior ou igual a 3 com a referida curva. Veja Fig. 1 para uma ilustração da posição do círculo osculador e a curva no caso típico, ou seja, nos pontos onde a curvatura é estritamente crescente.

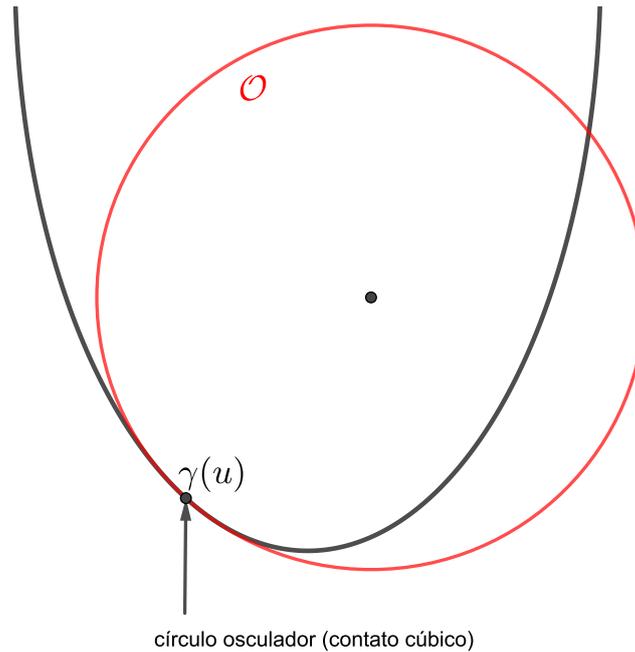


Figura 1: Círculo osculador e contato cúbico com a curva γ no ponto $\gamma(u)$ no caso típico.

No caso de um vértice, o contato entre o círculo osculador e a curva γ é quártico ou superior. Veja Fig. 2.

O trabalho está organizado do seguinte modo:

Na seção 2 interpretamos os vértices de uma curva convexa como sendo os pontos de contato entre γ' (indicatriz tangente) e uma família de círculos concêntricos. Esse ponto de vista é aparentemente novo na literatura.

Na seção 3 apresentamos uma demonstração geométrica do teorema dos quatro vértices. Nessa prova combinamos os resultados de A. Hurwitz [6] e S. Tabachnikov [11] aplicados ao desenvolvimento feito na seção 2.

Na seção 4 fazemos as conclusões finais, evidenciando que o teorema dos quatro vértices é um teorema global e também uma fonte fecunda de problemas de curvas

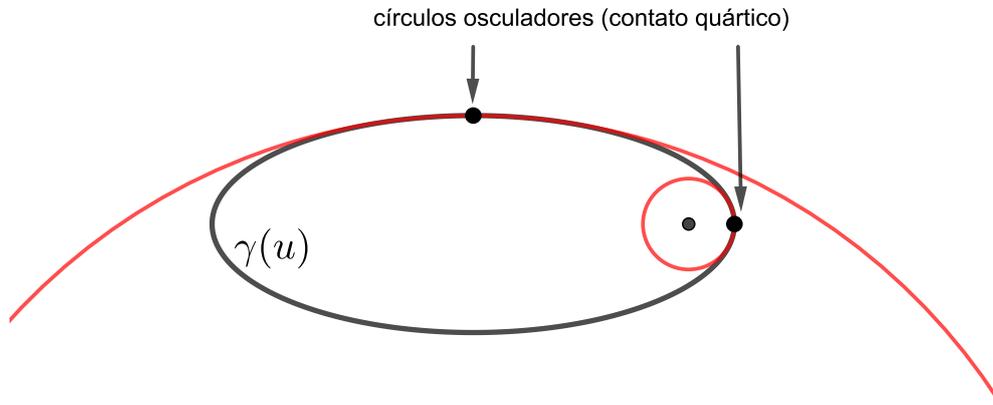


Figura 2: Círculos osculadores e contato quártico com a curva γ nos vértices.

planas e de curvas em superfícies. Para uma amostra dessa diversidade sugerimos a leitura do trabalho [1].

2 Vértices e contato

Considere uma curva de Jordan convexa $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ de classe C^r , $r \geq 3$, com curvatura k estritamente positiva e parametrizada de modo que $[\gamma', \gamma''] = 1$, onde $[\cdot, \cdot]$ representa a área orientada do paralelograma gerado pelos dois vetores. Isso sempre é possível pois γ tem curvatura positiva, ou equivalentemente, γ não possui ponto de inflexão (contato cúbico ou mais degenerado com a reta tangente). Portanto, a curvatura k de γ é dada por:

$$k = \frac{1}{|\gamma'|^3} = \frac{1}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Assim, obtemos que $k^{-\frac{2}{3}}(u) = |\gamma'(u)|^2$ (distância ao quadrado de $\gamma'(u)$ a origem).

Logo, os pontos críticos de k são os pontos de tangências entre a curva γ' e o círculo centrado na origem e de raio $|\gamma'(u)|$.

Considere a curva $\gamma': [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, com as hipóteses acima, é uma curva regular simples e periódica de período L . De fato, L é comprimento afim de γ . Além disso observamos que $\int_0^L \gamma'(u) du = 0$ e que o traço de γ' é um conjunto estrelado em relação a origem, i. e., para todo $\gamma'(u)$ o segmento de reta $r_t = t\gamma'(u)$, $t \in [0, 1]$ está contido na região delimitada pelo traço de γ' .

Denote por Γ' a região compacta simplesmente conexa delimitada pelo traço de γ' , i. e., $\gamma'([0, L]) = \partial\Gamma'$.

O seguinte lema é devido a H. Guggenheimer, [5].

Lema 1. *Uma curva fechada $\beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a derivada de uma curva de Jordan convexa γ de classe C^r ($r \geq 2$) se, e somente se, $\int_0^L \beta(u)du = (0, 0)$ e o traço de β é um conjunto estrelado em relação a origem.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\beta(u) = \gamma'(u)$, sendo γ uma curva fechada, então $\int_0^L \beta(u)du = (0, 0)$. Se β não for estrelado em relação a origem segue que existem dois pontos u_0 e u_1 tais que os vetores $\gamma'(u_0)$ e $\gamma'(u_1)$ sejam paralelos. A análise gráfica mostramos que a indicatriz tangente é injetiva e essa situação não é compatível com a convexidade de γ . Veja Fig. 3.

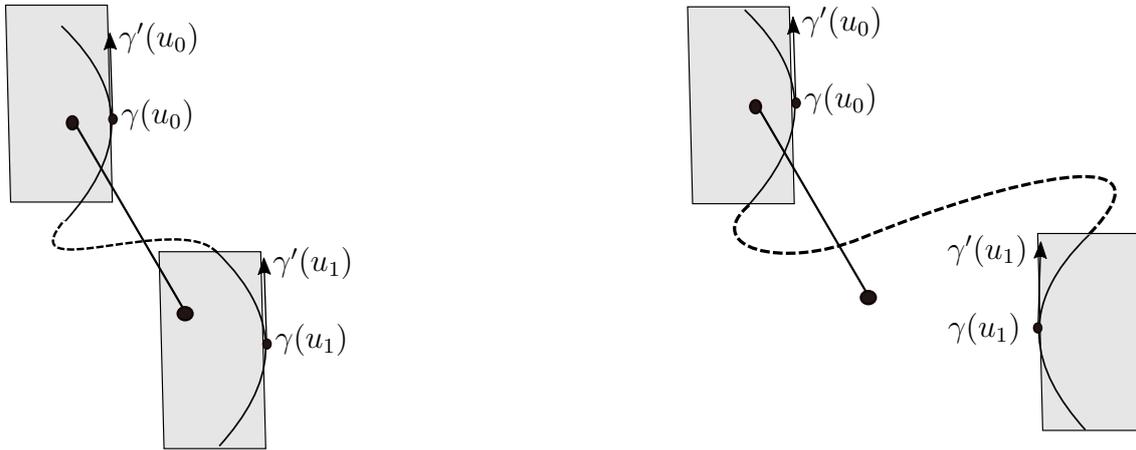


Figura 3: Curva estrelada não convexa.

(\Leftarrow) Considere β curva fechada em relação a origem tal que $\int_0^L \beta(u)du = (0, 0)$. Então $\gamma(u) = \int_0^u \beta(u)du$ é uma curva fechada e podemos supor que $(0, 0)$ não pertence ao traço de γ . Com a hipótese de β ser estrelada, podemos concluir que γ é uma curva fechada com número de voltas (orientada), em relação a origem, igual a ± 1 . A suposição de γ ser não convexa implica a existência de dois pontos $\gamma(u_0)$ e $\gamma(u_1)$ como ilustrado na Fig. 3 e, portanto $\gamma' = \beta$ não seria estrelada. \square

3 Teorema dos quatro vértices

Nesta seção faremos uma demonstração geométrica do teorema dos quatro vértices para curvas estritamente convexas. A ideia básica é relacionar vértices (pontos de máximos e mínimos locais da curvatura) com a teoria do contato aplicada a uma curva (indicatriz tangente) e uma família de círculos.

Teorema 1. *Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular fechada e simples de classe C^k , $k \geq 2$. Então γ possui pelo menos quatro vértices, i.e., contém pelo menos dois pontos distintos de máximo local e dois pontos distintos de mínimo local de sua curvatura k .*

Demonstração. Considere a família de círculos C_r centrados na origem. Veja Fig. 4.

Afirmção: γ possui pelo menos 4 vértices.

De fato, nos pontos de tangências p_i entre a curva γ' e os círculos de raios r_i temos que $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$.

Essa condição caracteriza os pontos críticos da curvatura k de γ pois $\frac{d}{du} \left(\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \right) = 2\langle \gamma', \gamma'' \rangle$.

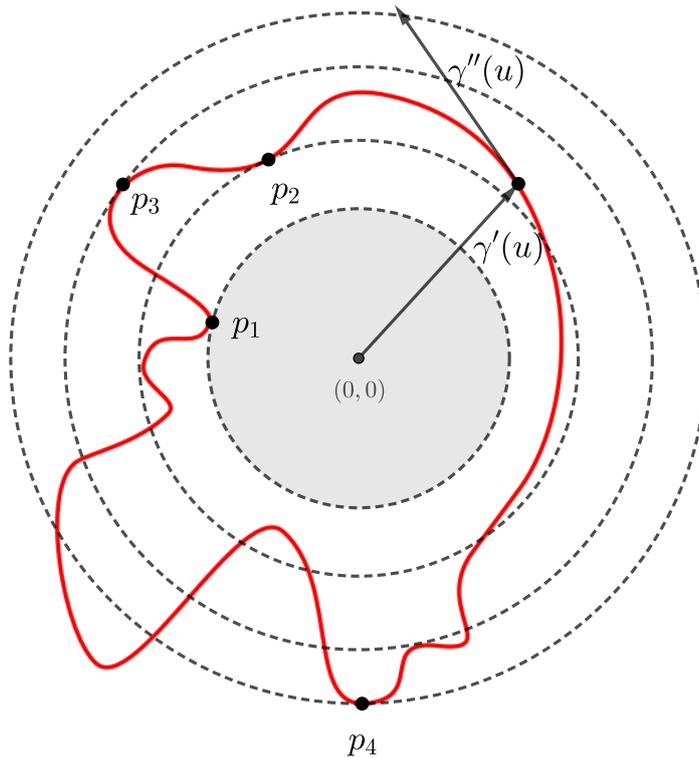


Figura 4: Alguns vértices p_i ($i = 1, \dots, 4$) obtidos pelos pontos de contato da curva γ' com a família de círculos concêntricos centrados na origem $(0, 0)$.

Como o traço da curva γ' é um conjunto estrelado podemos parametrizá-la por $\gamma'(u) = (r(u) \cos u, r(u) \sin u)$. Como $\int \gamma' = 0$ temos que $r(u)$ e também $r'(u)$

ortogonais a $\{\cos u, \sin u\}$ e, portanto, pela Proposição 1 abaixo temos que $r(u)$ possui pelo menos 4 pontos críticos e portanto γ possui pelo menos 4 vértices.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} r(u) \cos u \, du &= r(u) \sin u \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} r'(u) \sin u \, du, \\ &= - \int_0^{2\pi} r'(u) \sin u \, du = 0. \end{aligned}$$

□

Observação 1. *Para uma discussão sobre contatos entre famílias de curvas e curvas integrais de campos de vetores no plano, veja [8]. Para uma introdução sobre as propriedades globais de famílias de curvas planas definidas por equações diferenciais no plano, veja [10].*

Para conveniência do leitor incluímos o resultado geral abaixo que dá uma estimativa de cota inferior para o número de zeros de uma função periódica.

Proposição 1 ([6, 11]). *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π e de classe C^r , $r \geq 1$, tal que*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos p\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin p\theta \, d\theta = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Então f possui pelo menos $2(n+1)$ pontos críticos no intervalo $[0, 2\pi]$.

Em outros termos, se

$$f(\theta) = \sum_{p \geq n+1} [a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta],$$

então $\#\{\theta \bmod 2\pi : f(\theta) = 0\} \geq 2(n+1)$.

Demonstração. Faremos inicialmente a demonstração quando $n = 1$. Suponha que f tenha média zero, i. e., $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$. Portanto f troca de sinal pelo menos duas vezes. Vamos mostrar que f se anula pelo menos 4 vezes. Considere o vetor $N(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Como por hipótese $\int_0^{2\pi} f(\theta) N(\theta) d\theta = 0$ temos que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) N(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) [R_\alpha(N(\theta) + U)] d\theta = 0,$$

onde R_α é uma rotação de ângulo α e $U = (u_0, v_0)$ é um vetor constante.

Assim, fazendo uma translação e uma rotação se necessário, podemos supor que f anula-se nos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ com $f|_{(0,\pi)} > 0$.

Agora observamos que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta &= \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta, \\ &= \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} \theta d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} |f(\theta)|(-\operatorname{sen} \theta) d\theta > 0.\end{aligned}$$

Ambas as parcelas possuem o mesmo sinal e assim obtemos uma contradição.

Para o caso $n \geq 2$ seguiremos a mesma ideia.

Inicialmente interpretamos $f(\theta)$ como sendo a restrição ao círculo unitário de uma função $F(x, y)$ definida no plano, ou num aberto contendo o círculo unitário.

Definindo $x = \cos \theta$ e $y = \operatorname{sen} \theta$ temos que $\cos 2\theta = x^2 - y^2$, $\operatorname{sen} 2\theta = 2xy$. Em geral, usando a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ e o binômio de Newton, obtemos $\cos(p\theta)$ e $\operatorname{sen}(p\theta)$ como polinômios homogêneos de grau p nas variáveis x e y .

Assim, nas hipóteses da proposição temos que

$$F(x, y) = \sum_{p \geq n+1} [a_p P_p(x, y) + b_p Q_p(x, y)].$$

Logo $f(\theta) = F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$.

No caso $n = 2$, suponha $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$. Se f possuir somente 4 zeros podemos encontrar um polinômio trigonométrico $f_2(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \operatorname{sen} 2\theta$ tal que f_2 possua os mesmos zeros de f e $\operatorname{sinal}(f_2) = \operatorname{sinal}(f)$ o que conduz a $\int_0^{2\pi} f_2(\theta) f(\theta) d\theta \neq 0$, uma contradição. Logo f possui pelo menos 6 zeros e f' possui pelo menos 6 pontos críticos. O polinômio f_2 é a restrição ao círculo unitário de um polinômio $q_2(x, y) = (ax + by + c)(Ax + By + C)$. O par de retas ($q_2(x, y) = 0$) intersecta o círculo em quatro pontos (zeros de f).

O caso geral é obtido formalizando o argumento anterior. O ponto importante a observar é que dado um conjunto de $2n$ pontos no círculo unitário, existe um polinômio $Q(x, y)$ de grau n tal que a interseção de $Q(x, y) = 0$ com o círculo unitário é exatamente esse conjunto de $2n$ pontos. \square

Algumas observações sobre o teorema dos quatro vértices (veja [1, Cap. 5] e referências citadas no texto):

Observação 2. *i) No deslocamentos paralelo de curvas os vértices são preservados.*

ii) Os vértices são invariantes por inversões.

iii) O teorema dos quatro vértices é válido para curvas esféricas e no plano hiperbólico.

iv) A versão discreta do teorema dos quatro vértices é também válida com condições apropriadas.

4 Conclusão

Nesse trabalho apresentamos uma demonstração geométrica do teorema dos quatro vértices. Um dos objetivos foi o de enfatizar que esse teorema clássico ainda é fonte de problemas e de várias abordagens. A presente prova surgiu quando da elaboração das notas de um curso ministrado na Bienal da SBM, na Escola de Singularidades do ICMC/USP e no 32º Colóquio Brasileiro de Matemática, veja [1].

A inovação foi considerar a curva convexa γ parametrizada pelo comprimento de arco afim e não pelo comprimento de arco Euclidiano. Com isso, a análise geométrica foi a de considerar o contato da curva γ' com a família de círculos concêntricos centrados na origem, veja Fig. 4. Os vértices (pontos críticos da curvatura) da curva γ correspondem exatamente às tangências entre γ' (curva estrelada em relação a origem) e essa folheação de círculos. Para obter o resultado combinamos os resultados de A. Hurwitz [6] e S. Tabachnikov [11] que estabelecem cotas inferiores para o número de zeros de funções periódicas com hipóteses somente nos primeiros harmônicos não nulos $\{\cos(nu), \sin(nu)\}$. Veja Proposição 1.

Finalizamos, observando que o teorema dos quatro vértices é um fato remarcável da geometria extrínseca das curvas planas (fechadas e simples) e possui várias generalizações. Por exemplo, na geometria especial afim o análogo é o teorema dos seis vértices. Nesse caso, os vértices (pontos extremos da curvatura afim) são definidos como os pontos de contatos mais degenerados da curva com uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola). Para uma amostra da grande variedade de ramificação do tema dos “quatro vértices” sugerimos a leitura do trabalho [1].

Agradecimentos

Os autores agradecem aos pareceristas pelos comentários pertinentes e valiosos na avaliação do trabalho. O primeiro autor é bolsista de produtividade senior do CNPq.

Referências

- [1] CARNEIRO, M.; GARCIA, R. **O teorema dos quatro vértices e a sua recíproca**. 32º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA. p. 226, 2019.



- [2] DAHLBERG, B., The Converse of the Four Vertex Theorem, (edited posthumously by Vilhelm Adolffson and Peter Kumlin), Proc. Amer. Math. Soc. v.133, p. 2131-2135, 2005.
- [3] DeTURCK, D., GLUCK, H, POMERLEANO, D., VICK, D. SHEA, The four vertex theorem and its converse. Notices Amer. Math. Soc. v. 54 no. 2, p.192-207, 2007.
- [4] GLUCK, H., The converse to the four vertex theorem, L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. Ite Série, v. 17, p.295-309, 1971.
- [5] GUGGENHEIMER, H., Sign changes, extrema, and curves of minimal order. J. of Differential Geometry, v. 3, p.511-521, 1969.
- [6] HURWITZ , A., Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), v.19, p.357-408, 1902.
- [7] KNESER, A., Bemerkungen über die Anzahl der Extrema des Krümmung auf ges chlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht euklidischen Geometrie, Festschrift Heinrich Weber, Teubner, p. 170-180, 1912.
- [8] KHOVANSKII A. G., **Fewnomials**, Translations of Mathematical Monographs, v. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, viii+139.
- [9] MUKHOPADHYAYA, S., New methods in the geometry of a plane arc, Bull. Calcutta Math. Soc., I, p. 31-37, 1909.
- [10] SOTOMAYOR, J., **Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano**, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1981.
- [11] TABACHNIKOV, S. L., Around four vertices. Russian Math. Surveys. v. 45 p. 229-230, 1990.

Submetido em 06 Set. 2024

Aceito em 27 Nov. 2024