

Dinâmica dos triângulos circum-mediais

Dynamics of circummedial triangles

Helvécio Pereira de Castro

(in memoriam) *

Ronaldo Alves Garcia †

Evilson Vieira ‡

Resumo:

Nesse trabalho é investigado uma dinâmica associada aos triângulos circum-mediais. É demonstrado que a sequência dos triângulos circum-mediais converge para um triângulo equilátero. É também analisado a pré-imagem e relacionando a inversa com a inelipse de Steiner.

Palavras-chave: Baricentro. Dinâmica. Triângulo circum-medial.

Abstract:

In this work, a dynamic associated with circummedial triangles is investigated. It is shown that the sequence of circummedial triangles converges to an equilateral triangle. It is also analyzed the pre-image and relating the inverse with the Steiner inellipse.

Keywords: Barycenter. Dynamic. Circummedial triangles.

MSC: 51M04, 51M05, 00A05.

1 Introdução

A investigação das propriedades geométricas dos triângulos e dos círculos tem grande tradição. Esses elementos geométricos continuam sendo fonte de problemas. Alguns livros clássicos sobre o assunto são: [1], [2], [3], [6].

Um tratamento recente de vários temas motivados por triângulos, círculos e cônicas é apresentado em [5]. Para uma apresentação de vários problemas de dinâmica

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás

†Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, ragarcia@ufg.br

‡Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, evilson@ufs.br

associada a triângulos e polígonos veja [4] e [10]. Nesse trabalho, analisamos a dinâmica dos triângulos circum-mediais gerados a partir do baricentro. Veja seção 2.

No apêndice A calculamos explicitamente os lados do triângulo $\varphi(T)$ em função dos lados a, b e c de T e sua distorção.

2 Dinâmica atratora de triângulos

Dado o triângulo $T_0 = \{P_1, P_2, P_3\}$ com vértices P_1, P_2 e P_3 no plano \mathbb{R}^2 , considere o seu círculo circunscrito \mathcal{C} com centro (x_c, y_c) . Definimos a *distorção* $d(T_0)$ do triângulo T_0 como sendo a distância entre o baricentro $B = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$ de T_0 e o centro O do círculo circunscrito \mathcal{C} .

Lema 1. *O triângulo T_0 é equilátero se, e somente se, a sua distorção $d(T_0)$ é zero.*

O conceito de potência de um ponto interior a um círculo será útil nas demonstrações dos lemas 3 e 6 a seguir. Definida por $\text{Pot}_P = R^2 - d^2$, onde R é o raio e $d =$ a distância de P ao centro do círculo, é igual ao produto das medidas dos dois segmentos determinados por P em qualquer corda do círculo que contenha esse ponto. Veja Fig. 1.

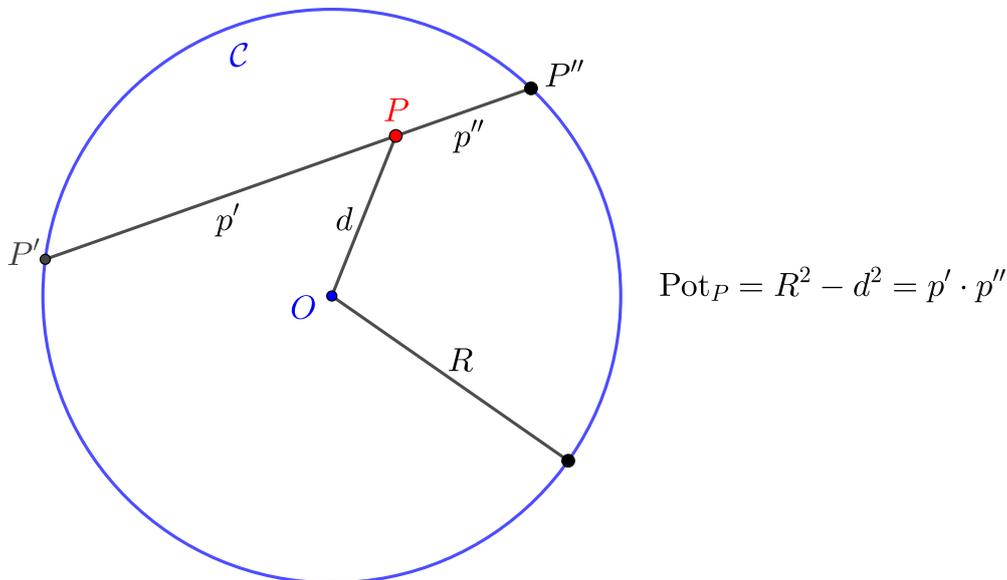


Figura 1: Corda $P'P''$ passando por P e segmentos PP' e PP'' .

Usaremos as seguintes caracterizações do baricentro e de sua potência em relação ao círculo que circunscribe o triângulo.

Denotando por $\mathbf{w}_i = P_i - Q$, $i = 1, 2, 3$, os vetores determinados por um ponto Q qualquer e pelos vértices $\{P_1, P_2, P_3\}$ de um triângulo T , e por $\mathbf{w} = B - Q$ o vetor posição do baricentro em relação ao ponto Q , então (veja Fig. 2)

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3}{3}.$$

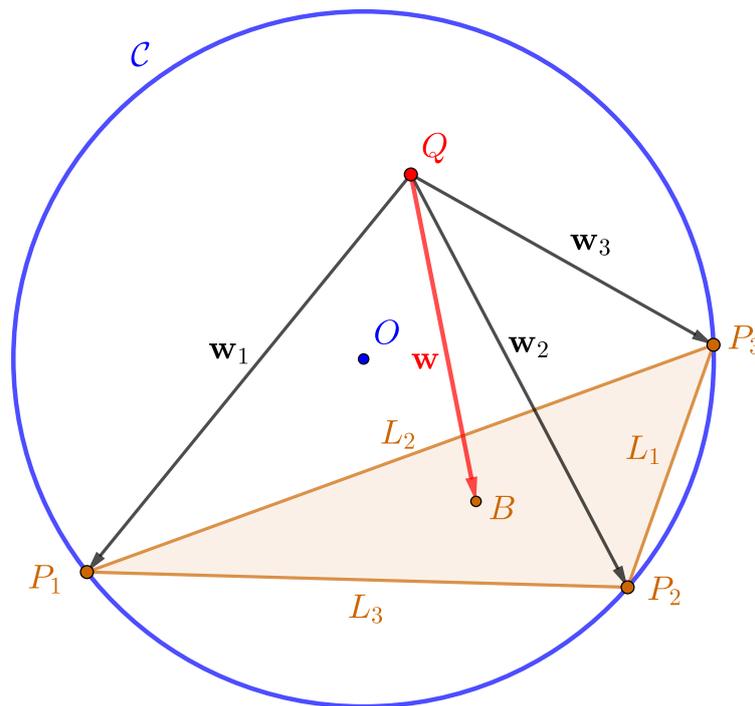


Figura 2: Vetor posição $w = B - Q$ com origem no ponto Q .

Em particular se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 são os vetores com origem no centro do círculo, e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 são os vetores com origem no baricentro do triângulo, então (veja Fig. 3)

$$d = d(T) = \frac{\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\|}{3} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Portanto,

$$9d(T)^2 = 3R^2 + 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \quad (1)$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_3\|^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 \quad (2)$$

Se L_i são as medidas dos lados do triângulo, então

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &= \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3\|^2 + \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\|^2 \\ &= 6R^2 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

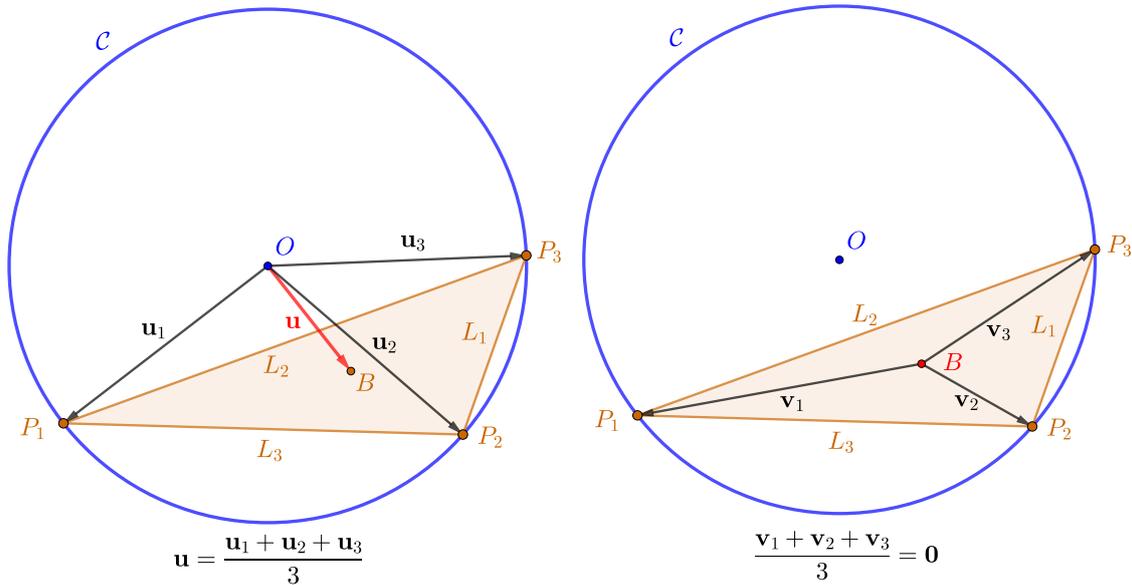


Figura 3: Vetor posição $u = B - O$ com origem no ponto O (esquerda) e média zero (direita) quando $Q = B$.

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &= \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\|^2 + \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{v}_1\|^2 + 2\|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\|\mathbf{v}_3\|^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Dessas expressões obtemos:

Lema 2. Com as notações acima, seja $T_0 = \{P_1, P_2, P_3\}$ um triângulo inscrito num círculo \mathcal{C} de raio R e B o seu baricentro. Então a potência de B em relação a \mathcal{C} é dada por:

$$\text{Pot}_B = \frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}{9} = \frac{\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_3\|^2}{3} \quad e \quad d(T)^2 = R^2 - \text{Pot}_B$$

Nos enunciados dos lemas a seguir, $A(T)$ representa a área do triângulo T . Utilizaremos nas demonstrações a seguinte expressão da área de um triângulo inscrito:

$$A(T) = \frac{L_1 L_2 L_3}{4R}$$

onde L_i são as medidas dos lados do triângulo e R o raio do círculo \mathcal{C} .

Definição 1. Considere um círculo \mathcal{C} e \mathcal{T} , o conjunto dos triângulos inscritos em \mathcal{C} . Definimos a função

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T} \\ T &\mapsto \varphi(T) \end{aligned}$$



da seguinte forma:

Dado $T \in \mathcal{T}$ com vértices $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{C}$ e baricentro B , tomemos os pontos $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{C}$ tais que $P_i Q_i$ é a corda de \mathcal{C} que passa por B . Então $\varphi(T)$ será o triângulo de vértices Q_1, Q_2, Q_3 .

Lema 3. *Seja T um triângulo não equilátero inscrito em um círculo \mathcal{C} de raio R . Então*

$$A(\varphi(T)) > A(T)$$

Demonstração. Na definição de $\varphi(T)$, cada par de semirretas com origem nos vértices P_i e P_j contendo o baricentro B de T determina triângulos semelhantes $\{B, P_i, P_j\}$ e $\{B, Q_j, Q_i\}$, opostos pelo vértice em B . De fato, utilizando a potência do ponto B ($\text{Pot}_B = R^2 - d(T)^2$) temos $\|P_j - B\| \|Q_j - B\| = \text{Pot}_B = \|Q_i - B\| \|P_i - B\|$ e então

$$\lambda_{ij} = \frac{\|Q_j - B\|}{\|P_i - B\|} = \frac{\|Q_i - B\|}{\|P_j - B\|} = \frac{\text{Pot}_B}{\|P_i - B\| \|P_j - B\|}$$

sendo λ_{ij} a razão de semelhança entre os triângulos. Os lados desses triângulos opostos aos vértices em B , que correspondem aos lados L_{ij} e \bar{L}_{ij} dos triângulos T e $\varphi(T)$ respectivamente, são então relacionados por $\bar{L}_{ij} = \lambda_{ij} L_{ij}$.

Determinando as áreas dos triângulo T e $\varphi(T)$ através das medidas dos seus lados obtemos a relação

$$A(\varphi(T)) = \frac{\bar{L}_{12} \bar{L}_{13} \bar{L}_{23}}{4R} = \lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{23} \frac{L_{12} L_{13} L_{23}}{4R} = \lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{23} A(T).$$

Por outro lado, as expressões dos λ_{ij} acima, implicam que

$$\lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{23} = \frac{(\text{Pot}_B)^3}{\|P_1 - B\|^2 \|P_2 - B\|^2 \|P_3 - B\|^2}$$

e utilizando a expressão da potência do baricentro como a média dos quadrados das distâncias aos vértices, isto é,

$$\text{Pot}_B = \frac{\|P_1 - B\|^2 + \|P_2 - B\|^2 + \|P_3 - B\|^2}{3}$$

vemos que o fator $\lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{23}$ que relaciona as áreas de T e $\varphi(T)$, é de fato o cubo da razão entre a média aritmética e a média geométrica de $\|P_1 - B\|^2$, $\|P_2 - B\|^2$ e $\|P_3 - B\|^2$. Esta razão é maior ou igual a 1, sendo que é igual a 1 se e somente se $\|P_1 - B\| = \|P_2 - B\| = \|P_3 - B\|$, ou seja, se o triângulo T for equilátero. Como por hipótese T não é equilátero concluímos que $A(\varphi(T)) > A(T)$. □

Lema 4. *Seja \mathcal{C} um círculo e B um ponto no seu interior como mostrado na Fig. 4. Então, os triângulos $\{B, P_1, P_2\}$ e $\{B, Q_1, Q_2\}$ são semelhantes.*

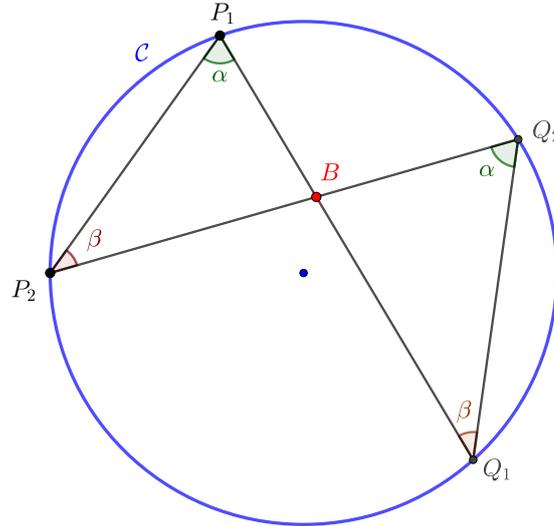


Figura 4: Os triângulos $\{B, P_1, P_2\}$ e $\{B, Q_1, Q_2\}$ são semelhantes.

Lema 5. *Seja $\tilde{\mathcal{C}}$ o círculo concêntrico com \mathcal{C} de raio igual a $d(T)$. As semirretas com origem nos vértices P_1, P_2 e P_3 de T que determinam os vértices Q_1, Q_2 e Q_3 do triângulo $\varphi(T)$, intersectam o círculo $\tilde{\mathcal{C}}$ no ponto B e em três pontos distintos \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 e \tilde{P}_3 (um desses pontos será o próprio B no caso de uma das semirretas ser tangente ao círculo $\tilde{\mathcal{C}}$) determinando assim um triângulo \tilde{T} inscrito nesse círculo. Então o baricentro de $\tilde{T} = \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3\}$ coincide com o baricentro do triângulo $\varphi(T) = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja Fig. 5.*

Demonstração. Vamos representar por \tilde{B} e $B_{\varphi(T)}$ os baricentros de \tilde{T} e de $\varphi(T)$ respectivamente, e por $\mathbf{v}_{P_i}, \mathbf{v}_{Q_i}, \mathbf{v}_{\tilde{P}_i}, \mathbf{v}_{\tilde{B}}$ e $\mathbf{v}_{B_{\varphi(T)}}$ os vetores determinados com base no ponto B na direção dos respectivos vértices e baricentros dos triângulos T, \tilde{T} e $\varphi(T)$.

Observe que para $i = 1, 2, 3$, os pontos P_i, \tilde{P}_i, B e Q_i são colineares, e que em virtude dos círculos serem concêntricos os segmentos BP_i e \tilde{P}_iQ_i são congruentes. Segue desse fato que

$$\mathbf{v}_{\tilde{P}_i} = \mathbf{v}_{P_i} + \mathbf{v}_{Q_i} \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

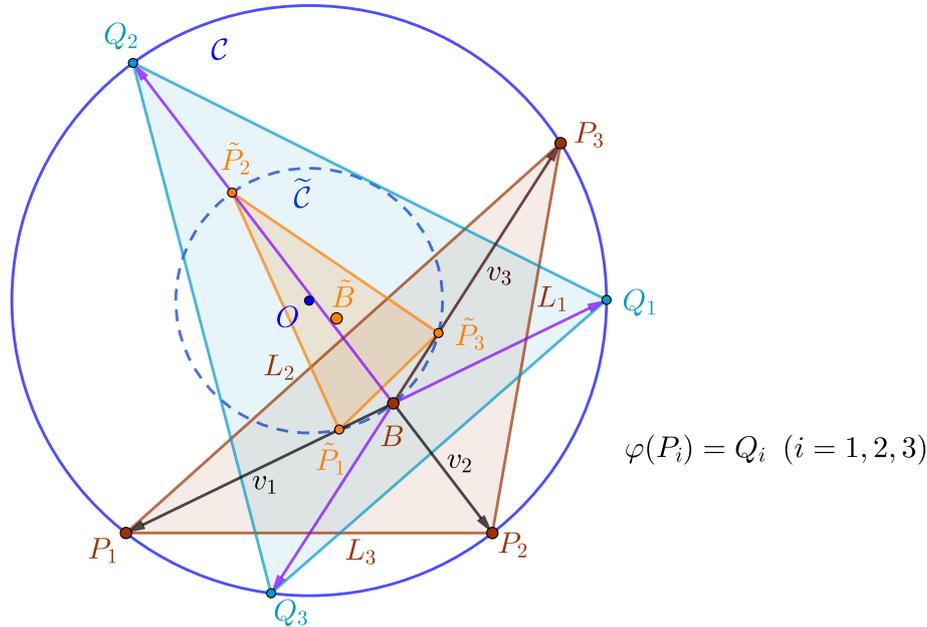


Figura 5: Os baricentros dos triângulos $\tilde{T} = \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3\}$ e $\varphi(T) = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ são coincidentes.

Somando as expressões acima, observando que como B é o baricentro de T então $\mathbf{v}_{P_1} + \mathbf{v}_{P_2} + \mathbf{v}_{P_3} = \mathbf{0}$, obtemos

$$\mathbf{v}_{\tilde{B}} = \frac{\mathbf{v}_{\tilde{P}_1} + \mathbf{v}_{\tilde{P}_2} + \mathbf{v}_{\tilde{P}_3}}{3} = \frac{\mathbf{v}_{Q_1} + \mathbf{v}_{Q_2} + \mathbf{v}_{Q_3}}{3} = \mathbf{v}_{B_{\varphi(T)}}$$

Da igualdade dos vetores $\mathbf{v}_{\tilde{B}}$ e $\mathbf{v}_{B_{\varphi(T)}}$ concluímos que os baricentros \tilde{B} e $B_{\varphi(T)}$ são coincidentes. □

Lema 6. *Seja T um triângulo não equilátero inscrito em um círculo \mathcal{C} de raio R . Então*

$$0 < \frac{d(\varphi(T))}{d(T)} \leq \sqrt{1 - \frac{16A(T)^2}{27[R + d(T)]^4}}$$

Demonstração. Pelo Lema 5 temos que $d(\varphi(T)) < d(T)$ uma vez que \tilde{B} está no interior do círculo $\tilde{\mathcal{C}}$ cujo raio é igual a $d(T)$. Faremos em seguida uma estimativa da posição do ponto \tilde{B} em relação ao raio de $\tilde{\mathcal{C}}$, ou seja, uma estimativa da razão entre $d(\varphi(T))$ e $d(T)$.

Antes, porém observe que o triângulo \tilde{T} não é equilátero, e assim $d(\varphi(T)) > 0$. De fato, suponhamos que \tilde{T} seja equilátero. Então \tilde{B} coincide com O portanto, a

reta $\tilde{P}_i B$ coincide com a reta OP_i . Portanto $P_i \hat{O} P_j = \tilde{P}_i \hat{O} \tilde{P}_j = 120^\circ$. Isso implica que T também é equilátero, o que contraria a hipótese.

Vamos representar por α_i ($i = 1, 2, 3$) os ângulos determinados pelas semirretas com origem no baricentro B e contendo os vértices adjacentes ao lado L_i do triângulo T , e por l_i o lado correspondente do triângulo \tilde{T} . O lado l_i é compreendido por um ângulo inscrito no círculo \tilde{C} com vértice em B que é igual a α_i ou o seu suplementar ($\pi - \alpha_i$). Nos dois casos a Lei dos senos nos dá $l_i = 2d \operatorname{sen}(\alpha_i)$. Veja Fig. 6.

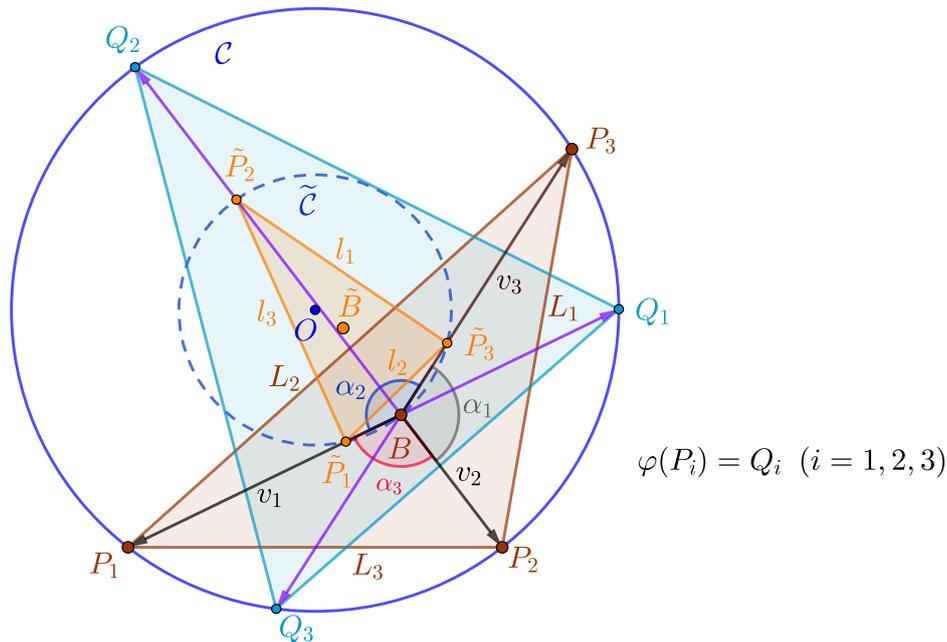


Figura 6: Relações métricas nos triângulos $\tilde{T} = \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3\}$ e $T = \{P_1, P_2, P_3\}$.

A área de um triângulo qualquer pode ser determinada em função de um de seus ângulos θ e dos lados adjacentes a e b , por $ab \operatorname{sen}(\theta)/2$. A área dos triângulos de base L_i e vértice B é igual $1/3$ da área de $A(T)$ (a altura é $1/3$ da altura de T), que será representada aqui simplesmente por A . Observe também que as medidas dos outros lados desse triângulo (adjacentes a α_i), são limitadas superiormente por $R + d$. A partir desses fatos obtemos para $i = 1, 2, 3$ as desigualdades

$$\operatorname{sen}(\alpha_i) \geq \frac{2A}{3(R+d)^2} \quad \text{e} \quad l_i \geq \frac{4dA}{3(R+d)^2}$$

O raio do círculo \tilde{C} é igual a $d = d(T)$ e a distância do baricentro de \tilde{T} ao centro do círculo é igual a $d(\varphi(T))$. Utilizando-se o Lema 2

Temos

$$d^2 - d(\varphi(T))^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{9} \geq \frac{16d^2 A^2}{27(R+d)^4}$$



e portanto

$$\frac{d(\varphi(T))^2}{d(T)^2} \leq \left(1 - \frac{16A^2}{27(R+d)^4}\right).$$

□

Observe que apenas se T fosse equilátero essa cota superior seria nula, uma vez que nesse caso $d = 0$ e a área seria $A_{eq} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, então

$$\frac{16A^2}{27(R+d)^2} < \frac{16A_{eq}^2}{27R^4} = 1$$

Seja T_0 um triângulo qualquer inscrito no círculo \mathcal{C} de raio R e centro O . A partir de T_0 a aplicação φ dá origem a uma sequência de triângulos inscritos, que representamos por (T_n) , definida indutivamente por $T_{n+1} = \varphi(T_n)$ para todo $n \geq 0$. No que se segue as áreas dos triângulos serão representadas por A_n , a sequência dos baricentros por B_n e as distância dos baricentros ao centro do círculo $d(T_n)$ serão representadas simplesmente por d_n .

Proposição 1. *Seja T_0 um triângulo não equilátero inscrito em um círculo \mathcal{C} . Então existe $k_0 < 1$ tal que $0 < d_{n+1} < k_0 d_n$ para todo $n \geq 0$. Além disso*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right) = 0.$$

Demonstração. Seja $A_n = A(T_n)$ a sequência das áreas de T_n . Como $d_0 > 0$ por hipótese, segue por indução utilizando o Lema 3 que $A_{n+1} > A_n$ e, utilizando o Lema 6, que $0 < d_{n+1} < d_n$ para todo $n \geq 0$. Ainda pelo Lema 6 temos

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} \leq k_n = \sqrt{1 - \frac{16A_n^2}{27(R+d_n)^4}}.$$

O fato da sequência (A_n) ser crescente e (d_n) ser decrescente implica que (k_n) é decrescente. Logo $d_{n+1} \leq k_n d_n < k_0 d_n$ para todo $n \geq 0$ e como $k_0 < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = 0$.

Segue da convergência de d_n para zero, que A_n converge para a área do triângulo equilátero $A_{eq} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right) = 0.$$

□

Podem ser obtidos exemplos que mostram que a sequência das razões d_{n+1}/d_n embora limitada superiormente por 1 não é necessariamente decrescente. A convergência para zero da razão d_{n+1}/d_n implica automaticamente na existência de uma cota superior $\lambda < 1$ válida para n suficiente grande, entretanto os lemas acima implicam na existência de uma tal cota válida para todo $n \geq 0$, uma vez que a sequência de cotas superiores k_n é decrescente.

A cota superior k_0 que foi obtida depende de T_0 . Não existe uma cota superior menor que 1 para as razões d_{n+1}/d_n que seja válida para todo triângulo. De fato, dado d satisfazendo $R/3 \leq d < R$ e $\varepsilon > 0$ pode-se construir exemplos em que $d(T) = d$ e $d(\varphi(T))/d(T) > 1 - \varepsilon$. Por outro lado, dado $d < R/3$ pode-se mostrar que existe $\lambda < 1$ tal que $d_{n+1}/d_n < \lambda$ para todo triângulo T que satisfaz $d(T) \leq d$.

Teorema 1. *Seja T_0 um triângulo não equilátero inscrito em um círculo \mathcal{C} . Então existe um triângulo equilátero T tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n} = T \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n+1} = \varphi(T).$$

Demonstração. Cada vértice do triângulo T_n corresponde a um vértice de T_{n+1} determinado pela semirreta com origem naquele vértice e contendo o baricentro do triângulo. Podemos então representar por (X_n) , (Y_n) e (Z_n) as sequências formadas pelos vértices correspondentes da sequência T_n .

O segmento $X_n X_{n+2}$ é oposto ao ângulo inscrito em \mathcal{C} determinado pelas semirretas com origem no vértice X_{n+1} e contendo respectivamente os baricentros B_n e B_{n+1} (veja Fig. 7). Seja θ_n o ângulo determinado pelas semirretas com origem em X_{n+1} e tangentes ao círculo de raio d_n .

Observe que como d_n converge para zero então existe um número natural n_1 tal que θ_n é menor que um ângulo reto para todo $n \geq n_1$ (basta obter n_1 de modo que $d_{n_1} < \frac{\sqrt{2}R}{2}$). Então, como $d_{n+1} < d_n$ temos que $\|X_{n+2} - X_n\| < 2R \operatorname{sen}(\theta_n)$, de onde segue que para todo $n \geq n_1$

$$\|X_{n+2} - X_n\| < 4R \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_n}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_n}{2} \right) = 4R \frac{d_n}{R} \cos \left(\frac{\theta_n}{2} \right) = 4d_n \cos \left(\frac{\theta_n}{2} \right) < 4d_n.$$

Pela Proposição 1 a série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ é convergente, logo para todo $\varepsilon > 0$ existe n_2 tal que $\sum_{n=n_2}^{\infty} d_n < \varepsilon/4$. Em vista da desigualdade acima concluímos que para todo $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e todo $k \geq 1$

$$\|X_{n+2k} - X_n\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_{n+2i+2} - X_{n+2i}\| < \sum_{i=0}^{k-1} 4d_{n+2i} < \varepsilon$$

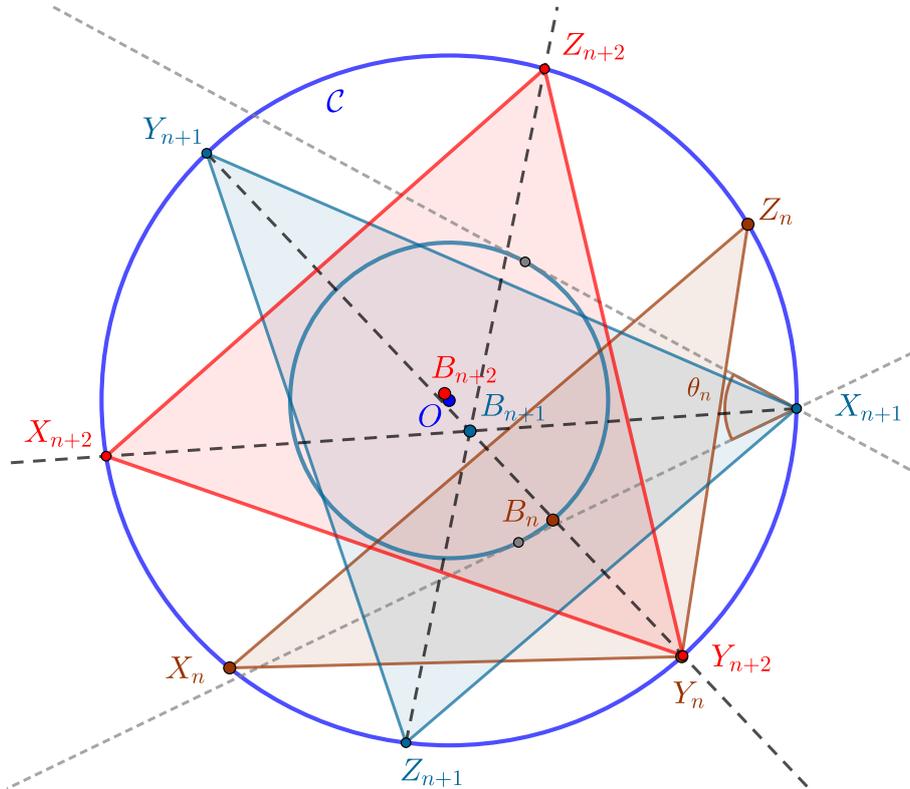


Figura 7: Sequência de triângulos $\{X_n, Y_n, Z_n\}$.

Portanto as subsequências (X_{2n}) e (X_{2n+1}) são de Cauchy e consequentemente são convergentes. Analogamente se mostra que (Y_{2n}) , (Y_{2n+1}) , (Z_{2n}) e (Z_{2n+1}) também são convergentes. Sejam X , Y e Z os limites de (X_{2n}) , (Y_{2n}) e (Z_{2n}) respectivamente, e $T = \{X, Y, Z\}$. Como o baricentro depende continuamente dos vértices do triângulo, e a sequência dos baricentros de T_{2n} converge para o centro do círculo, então o baricentro de T é o centro do círculo e T é equilátero.

Por fim, como $T_{2n+1} = \varphi(T_{2n})$, então a subsequência (T_{2n+1}) converge para o triângulo $\varphi(T)$, que também é equilátero. \square

Teorema 2. Para todo triângulo não equilátero $T_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$ a sua pré imagem pela aplicação φ é dada por $T'_0 = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$ e $T''_0 = \{P''_1, P''_2, P''_3\}$. Além disso, o baricentro de T_1 é ponto médio do segmento definido pelos baricentros de T'_0 e T''_0 . Existe uma elipse (inelipse de Steiner) tendo como focos os baricentros de T'_0 e T''_0 , sendo tangente aos lados do triângulo T_1 nos seus pontos médios. Veja Fig. 8.

Demonstração. Seja T_0 um triângulo de vértices P_1, P_2 e P_3 inscrito no círculo \mathcal{C} de raio R . Se P é um ponto qualquer no interior do círculo, para $i \in \{1, 2, 3\}$, a reta determinada por P e P_i intersecta o círculo em um ponto Q_i , determinando assim o triângulo T_1 de vértices Q_1, Q_2, Q_3 . Quando o ponto P é o baricentro de

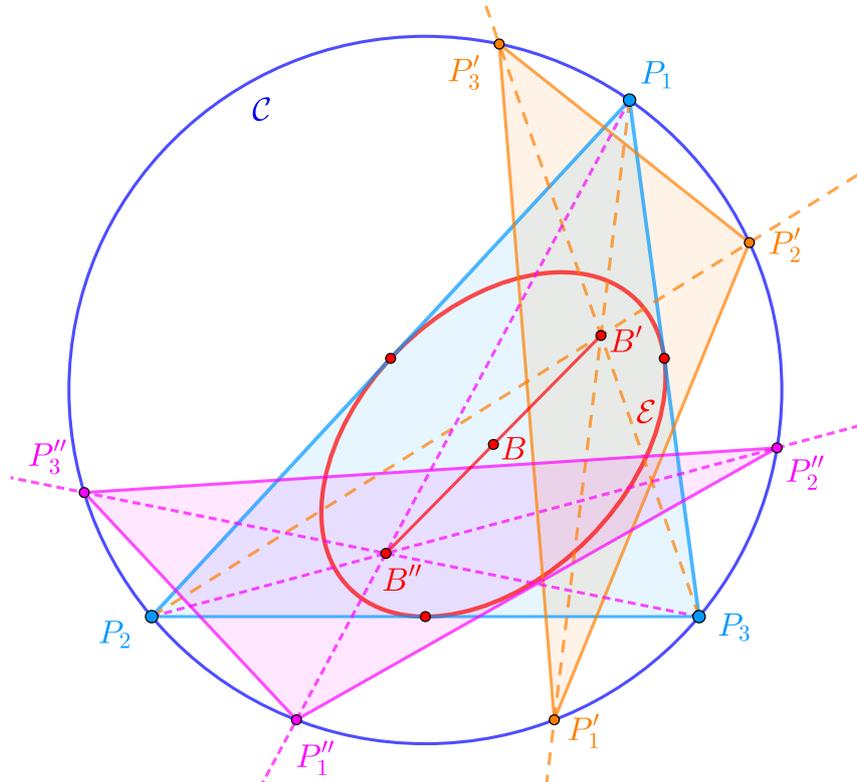


Figura 8: Pré imagem $\varphi^{-1}(\{P_1, P_2, P_3\}) = \{P'_1, P'_2, P'_3\} \cup \{P''_1, P''_2, P''_3\}$

T_0 , esse processo define a aplicação φ no espaço dos triângulos inscritos no círculo por $\varphi(T_0) = T_1$.

Por outro lado, quando o baricentro de T_0 for o próprio ponto P utilizado para determinar T_1 a partir de T_0 , então $T_0 \in \varphi^{-1}(T_1)$.

Um ponto P qualquer no interior do círculo e os vértices de T_0 e T_1 determinam os vetores $u_i = P_i - P$ e $v_i = Q_i - P$, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Observe que $|u_i||v_i| = \text{Pot}_P = R^2 - d^2$ onde $d = |P - O|$ (O é o centro do círculo C de raio R .) Observado que u_i e v_i têm sentidos opostos, resulta então que

$$v_i = -\frac{(R^2 - d^2)u_i}{|u_i|^2}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

O ponto P é o baricentro de T_1 se, e somente se, $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ (analogamente a equação $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ também caracteriza o baricentro de T_0). Utilizando as expressões acima vemos então que P é o baricentro de T_1 se, e somente se,

$$(R^2 - d^2) \left(\frac{u_1}{|u_1|^2} + \frac{u_2}{|u_2|^2} + \frac{u_3}{|u_3|^2} \right) = 0.$$

Como $R^2 - d^2 > 0$ para todo ponto no interior do círculo, então resumindo o que foi dito acima, podemos dizer que para um dado triângulo $T_0 = \{P_1, P_2, P_3\}$, a pré-imagem $\varphi^{-1}(T_0)$ é exatamente o conjunto das singularidades do campo

$$V(P) = \frac{P - P_1}{|P - P_1|^2} + \frac{P - P_2}{|P - P_2|^2} + \frac{P - P_3}{|P - P_3|^2}.$$

Um cálculo simples mostra que $V = \nabla(f)$, onde f é a função definida por

$$f(P) = \ln(|P_1 - P||P_2 - P||P_3 - P|) = \ln(|P_1 - P|) + \ln(|P_2 - P|) + \ln(|P_3 - P|).$$

As singularidades de V são selas (a hessiana de f tem traço nulo e determinante negativo), e as órbitas são transversais aos lados do triângulo (basta observar a definição do campo).

Então o baricentro de $\varphi^{-1}(T_1)$ é o conjunto dos pontos críticos da média geométrica das distâncias $|P_1 - P|$, $|P_2 - P|$ e $|P_3 - P|$.

Isso é análogo ao fato de que o baricentro de T_0 é o ponto crítico da média aritmética dos quadrados dessas mesmas distâncias.

O campo também pode ser definido na região exterior ao círculo (a potência nesse caso é $d^2 - R^2$) mas não está definido nos vértices do triângulo. A Fig. 9 mostra um retrato de fase típico (no exemplo mostrado o campo está multiplicado pelo fator $(R^2 - d^2)$, por isso o ω -limite de todas as órbitas interiores ou exteriores está no círculo, cujos pontos são também singularidades).

Considerando um sistema de coordenadas adequado não é difícil determinar as singularidades do campo V .

Especificamente considere um sistema de coordenadas cartesiano tal que os vértices são $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (a, b)$, $P_3 = (-1 - a, -b)$ e baricentro $(P_1 + P_2 + P_3)/3 = (0, 0)$.

Nessas coordenadas os pontos singulares são soluções da equação bi-quadrada

$$-12x^4 + (4ac - 12b^2 + 4c^2 + 4a^2)x^2 + 6acb^2 + 3c^2b^2 + 3b^2a^2 = 0.$$

Existem duas singularidades, sendo que o baricentro do triângulo T_1 é o ponto médio do segmento determinado pelos pontos singulares do campo. Veja Fig. 9.

Identificando $P = (x, y) = x + iy$, $P_1 = 1 + 0i$, $P_2 = a + ib$, $P_3 = -(1 + a) - ib$ temos também que as singularidades do campo V são definidas pela equação

$$E(x, y) = \frac{1}{P - P_1} + \frac{1}{P - P_2} + \frac{1}{P - P_3} = 0. \quad (5)$$

Observamos que $V = \overline{E}$. Portanto, pelo teorema de Marden, veja [7], [8] e

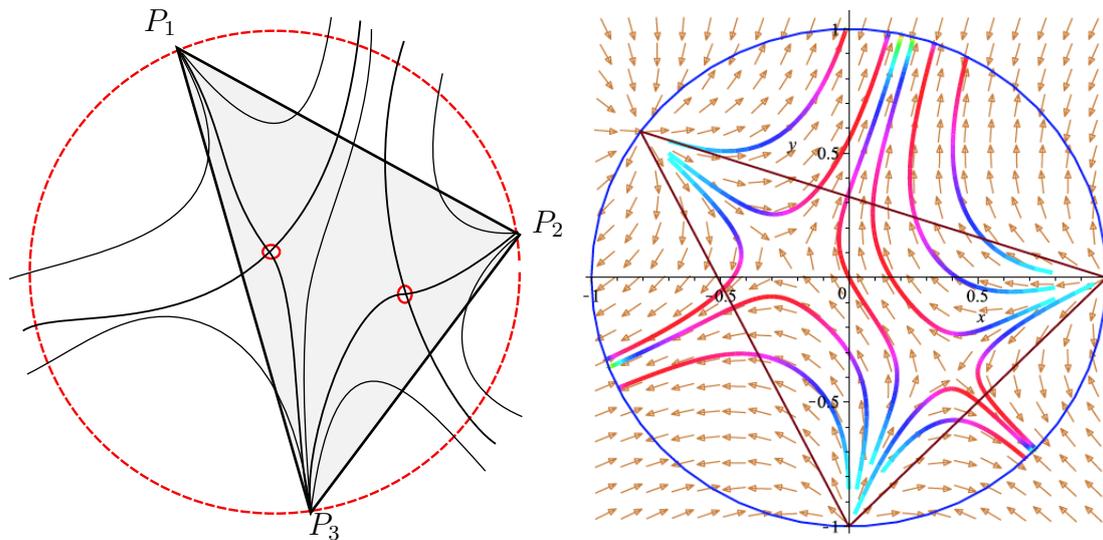


Figura 9: Singularidades do campo V e seu retrato de fase numa situação típica.

[9], existe uma elipse tendo como foco os dois zeros de $E(x, y) = 0$ e essa elipse é tangente aos segmentos $P_i P_j$ e passa pelos pontos médios $(P_i + P_j)/2$. \square

Conclusão

As propriedades geométricas dos triângulos e dos círculos são essenciais em vários ramos da Matemática. Nesse artigo analisamos a dinâmica dos triângulos circunmediais e provamos que uma sequência desses triângulos convergem para um triângulo equilátero. Outra parte interessante da dinâmica é relacionada a sua pré-imagem. No Teorema 2 descrevemos suas propriedades e identificamos a inelipse de Steiner (inscrita no triângulo T_1 passando pelos pontos médios dos lados e focos nos baricentros dos dois triângulos da pré-imagem). Dessa forma, podemos construir geometricamente os dois triângulos da pré-imagem a partir da inelipse de Steiner. Ver Fig. 10.

A inelipse de J. Steiner possui várias propriedades curiosas. Destacamos que a inelipse maximiza a área dentre todas as inelipses do triângulo dado. Também a mesma coincide com a elipse de Steiner do triângulo medial, i.e., ela é a elipse circunscrita ao triângulo medial centrada no baricentro. Outra curiosidade interessante é que se identificarmos o plano \mathbb{R}^2 com o plano complexo \mathbb{C} podemos definir a função polinomial $p(x) = (x - A)(x - B)(x - C)$. Os focos F_1, F_2 da inelipse de J. Steiner são os zeros da derivada $p'(x)$.

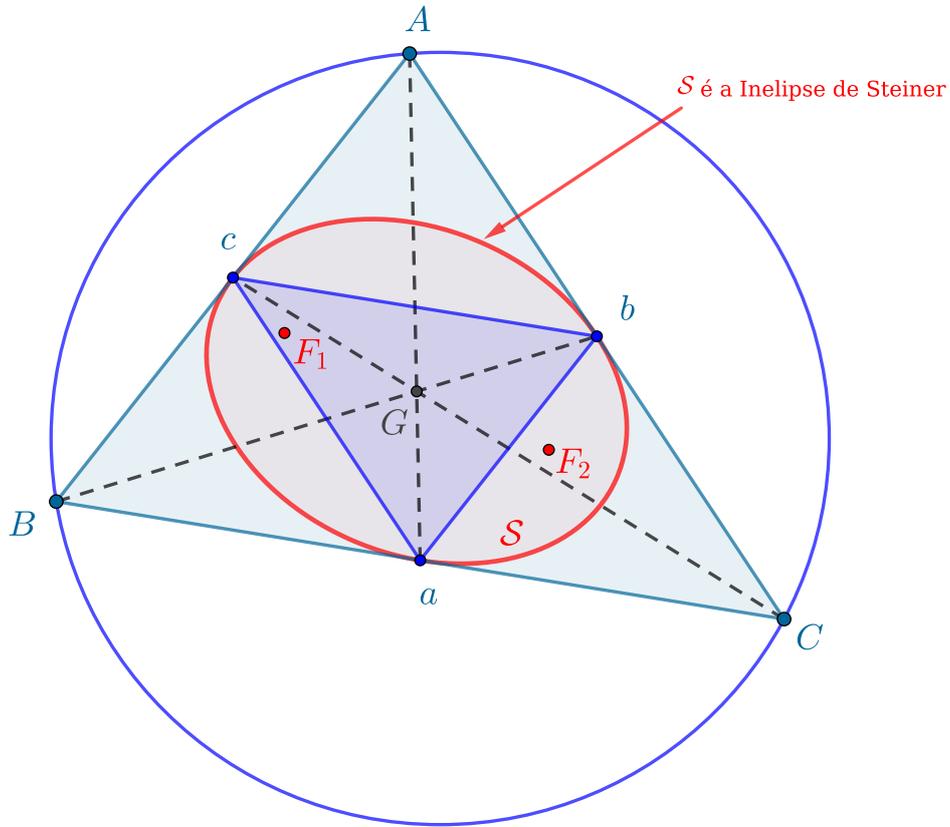


Figura 10: Inelipse de Steiner centrada no baricentro G do triângulo $\{A, B, C\}$. Os focos F_1 e F_2 de S são os baricentros da pré-imagem da dinâmica circum-medial φ .

Finalizamos propondo o problema de analisar a dinâmica em dimensão superior. Por exemplo, trocando triângulo por tetraedro (ou simplexo) e círculo por esfera (ou hiperesfera).

Agradecimentos

O segundo autor é bolsista do CNPq (313724/2021-0) e coordenador do Projeto PRONEX/ CNPq/ FAPEG 2017 10 26 7000 508. Os autores agradecem aos pareceristas anônimos pela leitura cuidadosa do texto.



A Apêndice

Sejam a , b e c os lados do triângulo ABC . Então a sua imagem $A_1B_1C_1$ pela aplicação φ possui lados iguais a:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 + 2c^2)}} = h(a, b, c) \\ b_1 &= \frac{b(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}} = h(b, c, a) \\ c_1 &= \frac{c(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{(2a^2 - b^2 + 2c^2)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)}} = h(c, a, b) \end{aligned} \quad (6)$$

Observamos que h é homogênea de grau 1 e simétrica nas variáveis b e c , i. e., $h(a, b, c) = h(a, c, b)$.

A razão de áreas dos triângulos é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Área}(A_1, B_1, C_1)}{\text{Área}(A, B, C)} &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 + 2c^2)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)} \\ &= \frac{8(S_a + S_b + S_c)^3}{(S_a + S_b + 4S_c)(S_a + 4S_b + S_c)(4S_a + S_b + S_c)} \\ &= \frac{2(s^2 - 4rR - r^2)^3}{s^6 - 3r(4R - 11r)s^4 - 3r^2(20R^2 + 40rR + 11r^2)s^2 - r^3(4R + r)^3} \end{aligned}$$

O raio do círculo circunscrito é igual a

$$R = \frac{abc}{\Delta}, \quad \Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

A distorção do triângulo ABC é dada por

$$d_t(\Delta)^2 = \frac{a^6 - a^4b^2 - a^4c^2 - a^2b^4 + 3a^2b^2c^2 - a^2c^4 + b^6 - b^4c^2 - b^2c^4 + c^6}{9(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

Também,

$$\begin{aligned} d_t(\Delta)^2 &= R^2 + \frac{8}{9}rR + \frac{2}{9}(r^2 - s^2) \\ &= \frac{(S_b + S_c)(S_a^2 + S_bS_c) + (S_b^2 - 6S_bS_c + S_c^2)S_a}{36(S_aS_b + S_aS_c + S_bS_c)} \\ S_a &= \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2), \quad S_b = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2), \quad S_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \end{aligned}$$

onde S_a, S_b, S_c são os símbolos de Conway. A distorção do triângulo $A_1B_1C_1$ é dada



por

$$d_t(\Delta_1)^2 = \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)(a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 + 3abc - ac^2 + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3)}{18abc}$$

Também,

$$d_t(\Delta)^2 = \frac{AB}{C}$$

$$A = (S_a^2 S_b + S_a^2 S_c + S_a S_b^2 - 6S_a S_b S_c + S_a S_c^2 + S_b^2 S_c + S_b S_c^2)$$

$$B = (4S_a^3 - 3S_a^2 S_b - 3S_a^2 S_c - 3S_a S_b^2 + 6S_a S_b S_c - 3S_a S_c^2 + 4S_b^3 - 3S_b^2 S_c - 3S_b S_c^2 + 4S_c^3)$$

$$C = 36(S_a + S_b + 4S_c)(S_a S_b + S_a S_c + S_b S_c)(S_a + 4S_b + S_c)(4S_a + S_b + S_c)$$

$$\left(\frac{d_t(\Delta_1)}{d_t(\Delta)}\right)^2 = \frac{4S_a^3 - 3(S_b + S_c)(S_a^2 + S_b S_c) - 3(S_b - S_c)^2 S_a + 4S_b^3 + 4S_c^3}{(S_a + 4S_b + S_c)(4S_a + S_b + S_c)(S_a + S_b + 4S_c)}$$

Portanto,

$$\left(\frac{d_t(\Delta_1)}{d_t(\Delta)}\right)^2 - 1 = \frac{-24(S_a + S_b + S_c)(S_a S_b + S_a S_c + S_b S_c)}{(S_a + S_b + 4S_c)(S_a + 4S_b + S_c)(4S_a + S_b + S_c)} < 0$$

Temos que,

$$S_a + S_b + S_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = s^2 - 4Rr - r^2 > 0$$
$$S_a S_b + S_a S_c + S_b S_c = \frac{(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)(a+b-c)}{4} = 4r^2 s^2 = 4\Delta^2.$$

Referências

- [1] COOLIDGE, J. L. **A Treatise on the Geometry of the Circle and Sphere**, New York, Chelsea, 1971.
- [2] COXETER, H. S. M.; GREITZER S. L. **Redécouvrons la géométrie**, Paris, Jacques Gabay, 1997 Translated from the English by R. Marchand, Reprint of the 1971 French translation.
- [3] GALLATLY, W. **The Modern Geometry of the Triangle**, London, Francis Hodgson, 1914.
- [4] GARCIA, R. A. **Dinâmica e Geometria**, 2º Colóquio de Matemática da Região Nordeste, Teresina - UFPI, 2012.



- [5] GARCIA, R. A.; REZNIK, D. **Discovering Poncelet Invariants in the Plane**, IMPA, Rio de Janeiro, 2021 bit.ly/3wXY6Wj.
- [6] JOHNSON, R. A. **Advanced Euclidean Geometry**, New York, Dover, 2nd edition, 1960 editor John W. Young.
- [7] MARDEN, M. Marden. A note on the zeros of the sections of a partial fraction, **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 51, p. 935–940, 1945.
- [8] MARDEN, M. **Geometry of Polynomials**, Mathematical Surveys, n. 3, American Mathematical Society, Providence, R.I., second edition, 1966.
- [9] PARISH, J. L. Parish. On the derivative of a vertex polynomial, **Forum Geometricorum**, v. 6, p. 285–288, 2006.
- [10] VIEIRA, E.; GARCIA, R. A. Asymptotic behavior of the shape of planar polygons by linear flows, **Linear Algebra and its Applications**, v. 557, p. 508–528, 2018.

Submetido em 10 Out. 2023.

Aceito em 21 Nov. 2023.