NEXUS Mathematicæ

v. 1, 2018

Resolução de Problemas Aplicados ao Cotidiano: uma metodologia alternativa para o ensino de divisibilidade e de congruência modular*

Problem solving applied to everyday life: an alternative methodology for teaching divisibility and modular congruence

Luciana Ávila Rodrigues†

Resumo: O presente texto têm como objetivo aplicar a metodologia de Resolução de Problemas em questões do cotidiano cujas soluções envolvem os conceitos de divisibilidade e congruência modular. A atividade proposta foi elaborada pelo grupo do Programa de Educação Tutorial (PET) em Matemática da UnB e desenvolvida com alunos do Ensino Fundamental e Médio, com alunos de Graduação e com professores da Educação Básica e da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Apresentamos uma proposta didática que pode ser trabalhada no Ensino Fundamental e Médio e que também serve de material de apoio para os professores. Como suporte para as discussões e para a fundamentação teórica foram usados os trabalhos de Saldanha [9], Silva e Friedmann [10] e Terada [11]. De modo geral, observamos que a proposta foi executada com êxito. Os participantes entenderam os conceitos apresentados e conseguiram resolver os problemas propostos utilizando o material de apoio confeccionado.

Palavras-chave: Matemática. Resolução de problemas. Aritmética modular.

Abstract: The present text aims to apply the Problem Solving methodology to everyday situations whose solutions involve concepts of divisibility and modular congruence. The proposed activity was elaborated by the Tutorial Education Program (PET) group in Mathematics of UnB and developed with middle and high-schoolers, undergraduate students, and with teachers of basic education and of youth and adult education (EJA). We present an educational proposal that can be worked on during middle and high-school and that also

*financiado por FNDE/CAPES

†Professora Tutora do Programa de Educação Tutorial (PET) em Matemática da UnB, Universidade de Brasília, luavila@unb.br

serves as a support material for the teachers. The works of Saldanha [9], Silva and Friedmann [10], and Terada [11] were used as a basis for the discussions and for the theoretical foundation. As a whole, we observed that the proposal was executed successfully. The participants understood the concepts presented and were able to solve the proposed problems using the manufactured supporting material.

Keywords: Mathematics. Problem solving. Modular arithmetics.

1 Introdução

Nos dias atuais, ocorre um fenômeno habitual nas aulas de matemática no que se refere às dificuldades dos alunos na aprendizagem dessa disciplina. Quando se trabalha com alunos que tem dificuldades em matemática é frequente afirmar que esses alunos têm dificuldades de abstração (Bergeron [1]). No entanto, observamos que atualmente grande parte da metodologia de ensino de matemática se reduz a um modelo de aulas expositivas, teóricas e abstratas, no qual o professor se torna o centro e o aluno tem um papel de mero espectador cujo maior esforço é, normalmente, na resolução de exercícios de fixação.

Buscando trazer para a sala de aula problemas que mostram a aplicabilidade da matemática, propomos a metodologia de Resolução de Problemas (Leal JR [6], Onuchic [8], Saldanha [9]) como uma alternativa para o ensino e aprendizagem de matemática. Isso permite ao aluno ser um agente ativo de seu aprendizado e, mais do que isso, proporciona ao aluno aprender.

Nesse sentido, este texto pretende ser, para o professor da Educação Básica e para o aluno, mais uma forma de ensino e aprendizagem fazendo o uso de problemas resolvidos com o conceito matemático de congruência modular, fazendo-os enxergar que a prática e a experiência são necessárias e que insucessos têm tanto valor quanto os sucessos. Segundo Saldanha (2012, página 7),

> O fato de analisar os diferentes caminhos escolhidos pelos alunos e seus resultados obtidos é muito enriquecedor para a aprendizagem. Verificar o porquê que um caminho não pode ser usado, o que está incorreto, o que invalida a resposta, são atividades que devem ser desenvolvidas com a participação de todos.

O objetivo principal deste texto é socializar como utilizar uma ferramenta da teoria dos números, a aritmética modular, como proposta didática a ser trabalhada no Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na Educação de Jovens e Adultos, na Educação Básica uma vez que envolve conceitos como restos da divisão entre dois números. A congruência modular tem muitas aplicações, dentre elas a justificativa para critérios de divisibilidade, problemas que envolvem propriedades das operações básicas e modelagem de vários fenômenos periódicos (Silva e Friedmann [10]). Os problemas explorados e apresentados estão relacionados com fenômenos periódicos como dia da semana em que ocorreu o nascimento de uma pessoa, o cálculo dos dois últimos dígitos do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) e a leitura do código de barras brasileiro. Esses problemas têm aplicações práticas no dia a dia e são problemas que podem ser estudados com alunos do Ensino Fundamental e Médio, além de servir como ferramenta para professores que trabalham na Educação Básica.

As atividades que aqui descreveremos foram elaboradas pelo Programa de Educação Tutorial (PET) em Matemática da Universidade de Brasília. Foram aplicadas para alunos de graduação em Matemática, para professores da Educação Básica, para professores da Educação de Jovens e Adultos e para alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Foram aplicadas no período de 2015 a 2018 em atividades de natureza extensionista desenvolvidas no próprio Departamento de Matemática como também em escolas da Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF). Este é um tema bastante atual e que pode ser trabalhado desde as classes do Ensino Fundamental II, que abrange do sexto ao nono anos, promovendo excelentes oportunidades de contextualização no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

2 Metodologia

As atividades foram realizadas em forma de oficinas e aplicadas em várias etapas: II Encontro do Centro Oeste dos grupos PET (II ECOPET); XXII Encontro Nacional dos grupos PET (XXII ENAPET); Semana de Matemática da UnB e Semana Universitária cujos participantes foram alunos de Graduação; Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, atividade realizada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional Distrito Federal, cujos participantes foram alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio de várias escolas públicas do DF; Cursos de formação de professores da Educação Básica e Educação de Jovens Adultos.

Os problemas abordados foram adaptados quanto ao nível de dificuldades e a forma de abordagem levou em consideração se os participantes eram alunos da Educação Básica, alunos de Graduação ou professores. A atividade foi aplicada para grupos de alunos ou professores que se reuniram um uma sala no próprio Departamento de Matemática ou nas escolas da Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF). Para trabalhar solução dos problemas ou participantes podiam se organizar em duplas ou em grupos compostos por até seis participantes.

A seguir listamos os problemas propostos e em seguida descrevemos o método trabalhado na execução de cada um deles.

2.1 Sobre o conteúdo

A aritmética modular é um conceito estudado em teoria dos números que envolve o conceito de congruência modular. O conceito de congruência modular está relacionado com o conceito de divisibilidade, que está formalmente presente no currículo da educação básica desde o sexto ano.

Dizemos que a é divisível por b se existe um c pertencente aos inteiros, tal que $a = bc + 0$ onde 0 é o resto da divisão de a por b. Quando analisamos o resto da divisão de um número qualquer por um divisor m temos que $r = \{0, 1, 2, 3, ..., m-1\}$. Uma congruência é uma relação entre dois números que, divididos por um terceiro, chamado módulo de congruência, deixam o mesmo resto. Por exemplo, o número 9 é congruente ao número 2, módulo 7, pois ambos deixam resto 2, ao serem divididos por 7. Representamos essa congruência do exemplo por $9 \equiv 2 \pmod 7$.

A fim de motivar a noção de congruência modular, foi proposto inicialmente o seguinte problema: A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a Figura 1. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

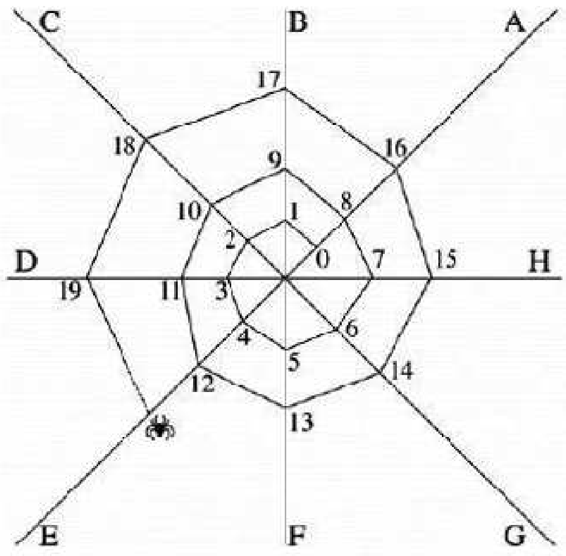

Figura 1: Teia de Aranha. Disponível em: <www.magiadamatematica.com /diversos/eventos/20-congruencia.pdf>. Acesso em: 20 Abr. 2018

Para resolver o problema, que foi inicialmente enunciado pelo aplicador da atividade, os participantes foram divididos em grupos. Após os participantes tentarem resolver o problema foi apresentada uma solução usando o conceito de divisibilidade e, neste momento, foi introduzida a noção de congruência modular. Uma vez que este problema foi resolvido e a notação de congruência foi esclarecida discutimos como gerar os dígitos verificadores do CPF, o dia da semana que você nasceu e do código de barras de um produto brasileiro. Cada um desses problemas é descrito a seguir.

2.1.1 Verificação dos dois dígitos de controle do CPF de uma pessoa

O número de CPF de uma pessoa, no Brasil, é constituído de 11 dígitos sendo um primeiro bloco com 9 algarismos e um segundo com mais dois algarismos, que são os dígitos de controle ou de verificação. Esses dois últimos dígitos são determinados através da congruência aritmética, módulo 11. Veja por exemplo [5].

No caso do CPF, o décimo dígito (que é o primeiro dígito verificador) é o resultado de uma congruência, módulo 11 de um número obtido por uma operação dos primeiros nove algarismos. Se $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9$ é a sequência formada pelos 9 primeiros dígitos, devemos multiplicá-los, nessa ordem, pela base $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e somar os produtos obtidos. O dígito que está faltando, que vamos representar por a_{10}, deve ser tal que, ao ser subtraído da soma obtida, gere um múltiplo de 11, isto é, se a soma obtida é S, o número $S - a_{10}$ deve ser múltiplo de 11, ou seja, $S - a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$. Note que tal número será o próprio resto da divisão por 11 da soma obtida.

A determinação do segundo dígito de controle é feita de modo similar, sendo que agora acrescentamos o décimo dígito (a_{10}) e usamos uma base de multiplicação de 0 a 9. Aqui, vale ressaltar que se o resto da divisão fosse 10, ou seja, se o número obtido fosse congruente a 10 módulo 11, usaríamos, nesse caso, o dígito zero.

Uma curiosidade interessante sobre o CPF é que o nono dígito indica a unidade federativa em que o CPF foi tirado, conforme mostra a tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Nono dígito do CPF segundo a unidade federativa de origem do CPF.

Número	**Unidade Federativa (UF)**
1	DF - GO - TO - MT - MS
2	AC - AM - AP - PA - RO - RR
3	CE - MA - PI
4	AL - PB - PE - RN
5	BA - SE
6	MG
7	ES - RJ
8	SP
9	PR - SC
0	RS

Para a execução dessa atividade os participantes foram divididos em duplas ou em grupos de até 6 pessoas. Em seguida foi entregue o material auxiliar confeccionado com cartolinas e EVA (Etil-Vinil-Acetato), conforme mostra figura 2. Isso possibilitou que os participantes pudessem fazer a verificação prática do cálculo dos dígitos de controle do seu próprio CPF ou o de um CPF válido previamente indicado seguindo os procedimentos descritos acima.

Figura 2: Dígitos do CPF. Fonte: Relatório de atividades

2.1.2 Calendários: Em que dia da semana você nasceu?

O procedimento que escolhemos funciona para datas entre 1900 e 2399 (devido a uma particularidade dos anos bissextos terminados em "00"). Com algumas modificações, contudo, pode ser adaptado para atender quaisquer datas. Os procedimentos são listados a seguir e podem ser encontrados em [5].

O objetivo dessa atividade era que cada participante descobrisse o dia da semana do seu nascimento. Para isso, os participantes tiveram que responder cada um dos itens abaixo.

- Calcule quantos anos se passaram desde 1900 até o ano em que você nasceu. Por exemplo, se você nasceu em 1980, irá anotar 80. Vamos chamar essa quantidade de A.

- Calcule quantos 29 de fevereiro existiram depois de 1900. Para isso, basta dividir por 4 o valor A, sem considerar o resto da divisão. Vamos chamar essa nova quantidade de B.

- Considerando o mês do nascimento, obtenha o número associado a ele, que está na tabela 2 a seguir. Procure o mês e anote o número que está ao lado dele. Vamos chamar esse número de C.

Tabela 2: Tabela dos meses.

Janeiro	0	Julho	6
Fevereiro	3	Agosto	2
Março	3	Setembro	5
Abril	6	Outubro	0
Maio	1	Novembro	3
Junho	4	Dezembro	5

- Considere o dia do nascimento (x). Calcule $x - 1$, que vamos chamar de D.
- Some agora os quatro números que você obteve nas etapas anteriores (A + B + C + D). Divida essa soma obtida por sete (7) e verifique o valor do resto dessa divisão.
- Finalmente, procure esse resto na tabela 3 a seguir. Você terá o dia da semana do seu nascimento ou de qualquer outra pessoa que queira descobrir.

Tabela 3: Tabela dos dias da semana.

Segunda-feira	0
Terça-feira	1
Quarta-feira	2
Quinta-feira	3
Sexta-feira	4
Sábado	5
Domingo	6

2.1.3 Verificação do dígito de controle do código de barras de um produto

Um dos códigos de barras mais usados no mundo todo é o EAN-13, *European Article Number*, constituído de 13 algarismos, sendo que o último é o dígito de controle. Veja por exemplo [5]. Nesse caso é usada a congruência módulo 10 e os fatores que compõem a base de multiplicação são os dígitos 1 e 3, que vão se repetindo da esquerda para a direita. Se $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}$ é a sequência formada pelos 12 primeiros dígitos, devemos multiplicá-los, nessa ordem, pela base 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3 e somar os produtos obtidos. Vamos representar por S a soma obtida. O dígito que está faltando, que vamos representar por a_{13} deve ser tal que ao ser somado com S, deve gerar um múltiplo de 10, isto é, o número $S + a_{13}$ deve ser múltiplo de 10, ou seja, $S + a_{13} \equiv 0 \pmod{10}$. Uma curiosidade interessante é que, no código de barras com 13 algarismos, os três primeiros dígitos do código representam o país de registro do produto (verifique que para produtos filiados no Brasil teremos sempre os dígitos 7, 8 e 9); os quatro dígitos seguintes identificam o fabricante; os próximos cinco dígitos identificam o produto e o último, como já sabemos, é o dígito verificador ou de controle que se pode calcular através da congruência módulo 10.

Para a resolução desse problema os participantes foram organizados em grupos de até 6 pessoas. Foi entregue um material confeccionado com cartolinas e EVA, conforme mostra figura abaixo. Cada participante recebeu uma ficha e números que os ajudaram na hora de fazer as divisões da congruência descritas acima. Além disso, o código de barras proposto para a atividade foi o código de barras de algum produto que o participante tivesse consigo naquele momento como, por exemplo, o código de barras do caderno, do estojo, da caixa do suco, da garrafa de água ou da barra de cereal.

Figura 3: Código de Barras. Fonte: Relatório de atividades

3 Considerações Finais

Constatamos, a partir da experiência e dos conhecimentos produzidos no desenvolvimento deste trabalho, que a metodologia da Resolução de Problemas foi eficaz no processo de ensino e aprendizagem. Os participantes se sentiram motivados e conseguiram concluir as atividades com êxito.

No início os participantes tiveram dificuldades em fazer as divisões pedidas e encontrar os restos. Foi necessário que os aplicadores das atividades os ajudassem e dessem dicas de como efetuar as divisões e considerar os restos. Para tal, foi utilizado o material confeccionado como apoio. Muitos perceberam que os insucessos podiam se tornar sucessos e depois das explicações já não mais cometiam os mesmos erros nas operações de divisão.

Entenderam os conceitos de divisibilidade e de congruência modular e conseguiram encontrar soluções para os problemas contextualizados propostos. Muitos se surpreenderam ao entender como podemos utilizar os conceitos apresentados em situações do cotidiano, como por exemplo no dígito verificador do CPF ou até mesmo o entendimento do funcionamento do código de barras de um produto. Utilizaram o material de apoio confeccionado e se sentiram motivados a usar esse material nas salas de aulas.

Existem inúmeras aplicações de divisibilidade e congruência que podem variar de forma muito interessante, sendo impossível apresentar todas neste trabalho. Essas aplicações podem servir de metodologia estimulante para alunos de várias faixas etárias. Mesmo não fazendo parte do currículo escolar, a congruência modular e suas aplicações podem ser trabalhados de forma eficaz, pois permitem ao aluno a capacidade de visualizar propriedades ligadas a divisibilidade e restos de números grandes sem efetuar cálculos cansativos. Além disso, os problemas contextualizados em assuntos do cotidiano geram maior interesse e concentração na formalização da resolução. Tudo isso contribuiu para que os resultados da atividade fossem avaliados de forma positiva pelos participantes.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os petianos e ex-petianos que ajudaram na elaboração e aplicação desta atividade.

Referências

[1] BERGERON, L. *Difficultés d'abstaction en mathématiques: certains fondements théoriques et idéologiques du discours noospérien de l'adaptation scolaire.*

Mémoire de maîtrise. Université de Québec à Montréal, 2017.

[2] BRASIL, RPM, *Revista do Professor de Matemática*. Volumes 12 e 45. Sociedade Brasileira de Matemática.

[3] BUCHMANN, J. *Introdução à Criptografia*. São Paulo: Berkeley, 2002.

[4] BURNETT, S. e PAINE, S. *Criptografia e Segurança: o Guia Oficial RSA*. São Paulo: Campus, 2002.

[5] DE SÁ, I. P. Aritmética modular e algumas de suas aplicações. Disponível em <http://www.magiadamatematica.com/diversos/eventos/20congruencia.pdf> Acesso em: 22 de Março de 2017.

[6] LEAL JR, L. C. e ONUCHIC, L. R. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista*. BOLEMA : Boletim de Educação Matemática (Online), v. 29, p. 955-978, 2015

[7] MARTINI, R. *Criptografia e Cidadania Digital*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2001.

[8] ONUCHIC, L. R. e ALLEVATO, N. S. G. *Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso, v. 25, p. 07-16, 2011.

[9] SALDANHA, M.A. Resolução de problemas: um metodologia alternative para o ensino aprendizagem de matemática nas escolas do CASE, *Anais do III EIEMAT*, UFSM, 2012.

[10] SILVA, V. A. e FRIEDMANN, C. V. P. *Congruência Módulo M e a Aritmética Modular: conceitos, resultados e aplicações*. Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, UNIGRANRIO - Rio de Janeiro. 2011.

[11] TERADA, R. *Segurança de Dados: Criptografia em Redes de Computadores*. São Paulo: Edgard Blucher, 2000.

Submetido em 4 maio 2018
Aceito em 20 jun. 2018