

# Circuncentros das Órbitas Triangulares de um Bilhar Elíptico

*Circumcenters of triangular orbits of an elliptic billiard*

Ronaldo A. Garcia\*

**Resumo:** O lugar geométrico definido pelos circuncentros das órbitas 3-periódicas de um bilhar elíptico é uma elipse. Neste artigo obtemos a equação explícita desta elipse e mostramos que a mesma é semelhante à elipse confocal do par de elipses de Poncelet. Este trabalho foi motivado pelo artigo de O. Romaskevich, [11].

**Palavras-chave:** Elipse. Bilhar. Curvatura afim. Circuncentro.

**Abstract:** The geometric locus defined by the circumcenters associated to 3-periodic orbits of an elliptic billiard is an ellipse. In this work we obtain the explicit equation of this set and also it is shown that this ellipse is similar to the inner confocal ellipse of the Poncelet pair. This work was inspired by the paper of O. Romaskevich, [11].

**Keywords:** Ellipse. Billiard. Affine curvature. Circumcenter.

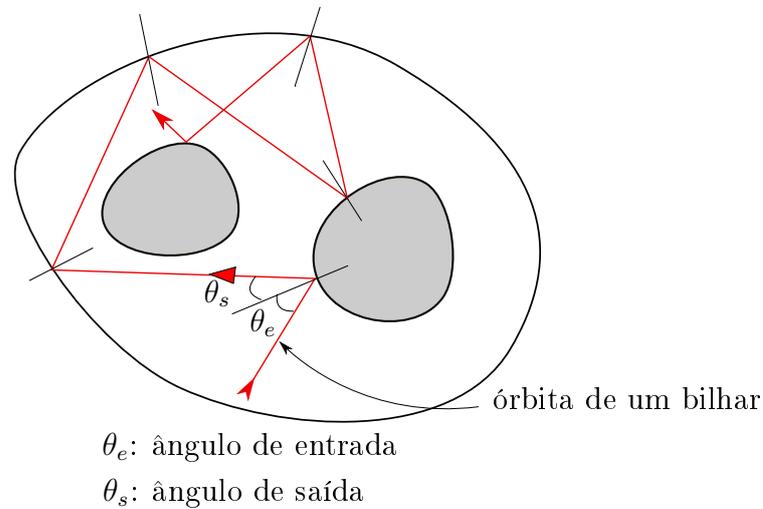
Este trabalho é dedicado à memória do Prof. *Genésio Lima dos Reis* (1940-2017).

## 1 Introdução

O problema do bilhar tem uma longa tradição de investigação e basicamente o objetivo é compreender a dinâmica global das partículas que se movimentam numa região com bordo ao longo de geodésicas (retas no plano) com choque elástico na fronteira, refletindo de acordo com as leis naturais da física (ângulo de entrada igual ao ângulo de saída com o vetor normal ao bordo). Numa região compacta do plano a órbita de um bilhar é curva poligonal formada por segmentos de retas com vértices localizadas na fronteira da região. Veja Fig. 1. A órbita do bilhar é chamada periódica quando for uma poligonal fechada. Os exemplos mais simples são as órbitas triangulares e são denominadas 3-periódicas. Para uma introdução aos bilhares veja [4], [6], [12].

---

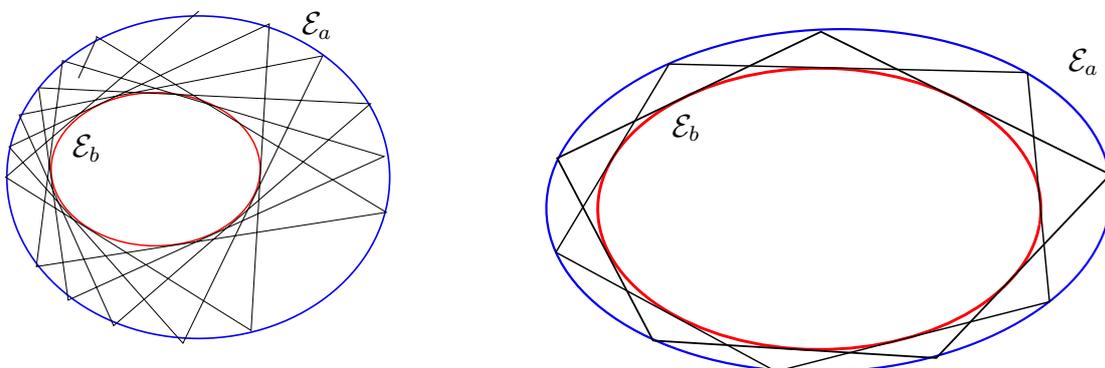
\*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, ragarcia@ufg.br



**Figura 1:** Órbita de um bilhar numa região compacta com fronteira regular.

Considere uma elipse  $\mathcal{E}$ , um ponto  $p_1 \in \mathcal{E}$  e o triângulo  $\Delta(p_1) = \{p_1, p_2, p_3\}$  inscrito em  $\mathcal{E}$  que define a órbita de um bilhar 3-periódico. Na Fig. 3 o ângulo  $\alpha$  denota os ângulos de incidência (entrada e saída da órbita) no vértice  $p_1$ . Em seguida considere o lugar geométrico  $\mathcal{E}_c = \{C(p_1), p_1 \in \mathcal{E}\}$ , onde  $C(p_1)$  é definido como sendo o centro do círculo circunscrito do triângulo  $\Delta(p_1)$ . Sabemos pelo Teorema de Poncelet que a família de triângulos  $\Delta(p_1)$  é tangente a uma elipse  $\mathcal{E}_1$  confocal com a elipse  $\mathcal{E}$ . Veja Fig. 4.

Lembramos que o Teorema de Poncelet afirma essencialmente que dadas duas elipses  $\mathcal{E}_a$  e  $\mathcal{E}_b$  e se for possível encontrar um polígono inscrito em  $\mathcal{E}_a$  e tangente a  $\mathcal{E}_b$  então existe uma infinidade de polígonos com a mesma propriedade. Veja Fig. 2.



**Figura 2:** Dinâmica do bilhar associado a um par de elipses (esquerda) e órbitas 5-periódicas (direita).

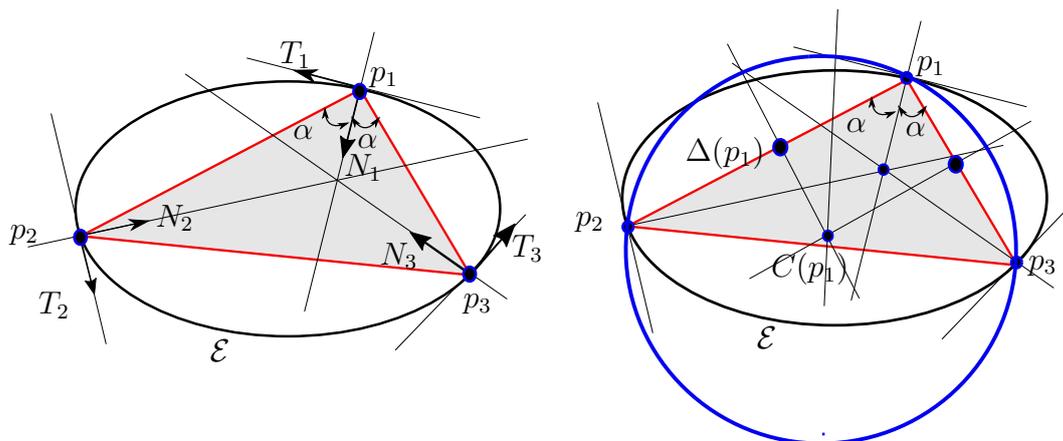
O objetivo deste trabalho é demonstrar, usando somente conceitos de geometria analítica real, que  $\mathcal{E}_1$  é uma elipse e obter explicitamente sua equação. O fato de que  $\mathcal{E}_c$  é uma elipse foi obtido por O. Romaskevich em [11] usando ferramentas de geometria algébrica complexa. Pelo tipo de análise realizada nenhuma informação sobre a equação da elipse  $\mathcal{E}_c$  foi explicitada em [11]. Nossa análise consistirá em parametrizar o lugar geométrico  $\mathcal{E}_c$  e mostrar que esta curva parametrizada possui curvatura afim constante e positiva (portanto é uma elipse). Este é o conteúdo da Proposição 6. No Teorema 1 descrevemos explicitamente os eixos da elipse  $\mathcal{E}_c$ . Os cálculos envolvidos, todos algébricos, são longos e podem ser verificados à mão, porém pode ser um trabalho cansativo. Usaremos recursos computacionais de cálculo simbólico, por exemplo, Maple, para executá-los.

## 2 Preliminares

Considere uma elipse  $\mathcal{E}$  definida implicitamente por  $h(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ . Para fixar os argumentos suporemos que  $a > b > 0$  e focos  $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (\pm c, 0)$ .

Dado um ponto  $p_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{E}$  temos que  $T_1 = (-\frac{y_1}{b^2}, \frac{x_1}{a^2})$  e  $N_1 = (-\frac{x_1}{a^2}, -\frac{y_1}{b^2})$  define uma base ortogonal positiva de  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposição 1.** *Para todo  $p_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{E}$  existe um único triângulo  $\Delta(p_1) = \{p_1, p_2, p_3\}$  inscrito em  $\mathcal{E}$  tal que  $\Delta(p_1)$  define uma órbita 3-periódica do bilhar inscrito em  $\mathcal{E}$ . Veja Fig. 3.*



**Figura 3:** Órbita triangular do bilhar inscrito na elipse  $\mathcal{E}$  (esquerda) e centro do círculo circunscrito (direita).

*Demonstração.* A demonstração consiste em calcular os ângulos de entrada e saída que a órbita faz nos três vértices do triângulo  $\Delta = \{p_1, p_2, p_3\}$  positivamente orientado. Veja Fig. 3.

Seja  $\alpha$  o ângulo de entrada e saída no vértice  $p_1$ . Assim, definimos duas direções  $d_{12} = \text{sen } \alpha T_1 + \text{cos } \alpha N_1$  e  $d_{13} = -\text{sen } \alpha T_1 + \text{cos } \alpha N_1$ . Calculando a interseção das retas  $p_1 + td_{12}$  e  $p_1 + td_{13}$  com a elipse  $\mathcal{E}$  obtemos os pontos  $p_2$  e  $p_3$  definindo um triângulo  $\Delta(p_1) = \{p_1, p_2, p_3\}$  inscrito na elipse.

A seguir iremos determinar as coordenadas de  $p_2$  e  $p_3$  em função do ponto  $p_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{E}$  e do ângulo  $\alpha$ .

Temos que  $p_2 = (x_2, y_2)$  onde  $x_2 = p_{2x}/q_2$  e  $y_2 = p_{2y}/q_2$ .

$$\begin{aligned} p_{2x} &= -b^4 ((a^2 + b^2) \cos^2 \alpha - a^2) x_1^3 - 2a^6 y_1^3 \cos \alpha \text{sen } \alpha \\ &\quad + a^4 ((a^2 - 3b^2) \cos^2 \alpha + b^2) x_1 y_1^2 - 2a^4 b^2 x_1^2 y_1 \cos \alpha \text{sen } \alpha \\ p_{2y} &= 2b^6 x_1^3 \cos \alpha \text{sen } \alpha - a^4 ((a^2 + b^2) \cos^2 \alpha - b^2) y_1^3 \\ &\quad + 2a^2 b^4 x_1 y_1^2 \cos \alpha \text{sen } \alpha + b^4 ((b^2 - 3a^2) \cos^2 \alpha + a^2) x_1^2 y_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= b^4 (a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha) x_1^2 + a^4 (b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha) y_1^2 \\ &\quad - 2a^2 b^2 (a^2 - b^2) x_1 y_1 \cos \alpha \text{sen } \alpha \end{aligned}$$

Temos também que  $p_3 = (x_3, y_3)$  onde  $x_3 = p_{3x}/q_3$  e  $y_3 = p_{3y}/q_3$ .

$$\begin{aligned} p_{3x} &= b^4 (a^2 - (b^2 + a^2)) x_1^3 \cos^2 \alpha + 2a^6 y_1^3 \text{sen } \alpha \cos \alpha \\ &\quad + a^4 (\cos^2 \alpha (a^2 - 3b^2) + b^2) x_1 y_1^2 + 2a^4 b^2 x_1^2 y_1 \cos \alpha \text{sen } \alpha \\ p_{3y} &= -2b^6 x_1^3 \text{sen } \alpha \cos \alpha + a^4 (b^2 - (b^2 + a^2) \cos^2 \alpha) y_1^3 \\ &\quad - 2a^2 b^4 x_1 y_1^2 \cos \alpha \text{sen } \alpha + b^4 (a^2 + (b^2 - 3a^2) \cos^2 \alpha) x_1^2 y_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= b^4 (a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha) x_1^2 + a^4 (b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha) y_1^2 \\ &\quad + 2a^2 b^2 (a^2 - b^2) x_1 y_1 \cos \alpha \text{sen } \alpha \end{aligned}$$

Os segmentos  $p_{12} = p_2 - p_1$  e  $p_{13} = p_3 - p_1$  são orientados pelos vetores direções  $d_{12} = \text{sen } \alpha T_1 + \text{cos } \alpha N_1$  e  $d_{13} = -\text{sen } \alpha T_1 + \text{cos } \alpha N_1$ .

As equações abaixo definem os cossenos dos ângulos de entrada e saída da órbita triangular nos pontos  $p_2$  e  $p_3$ .

$$\frac{\langle p_1 - p_2, N_2 \rangle}{|p_1 - p_2| |N_2|} = \frac{\langle p_3 - p_2, N_2 \rangle}{|p_3 - p_2| |N_2|}, \quad \frac{\langle p_1 - p_3, N_3 \rangle}{|p_1 - p_3| |N_3|} = \frac{\langle p_2 - p_3, N_3 \rangle}{|p_2 - p_3| |N_3|}.$$

Cálculos longos, usando as equações 1 e 2 e a definição do ângulo  $\alpha$ , corroborados

com computação algébrica, mostram que as duas equações acima possuem uma solução comum dada por

$$c^4|T_1|^4 \cos^4 \alpha + 2(a^2 + b^2)|T_1|^2 \cos^2 \alpha - 3 = 0, \quad |T_1|^2 = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}. \quad (3)$$

A equação 3 que é polinomial de grau 4 na variável  $\cos \alpha$  possui uma única solução real com  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  e portanto define de maneira única o triângulo afirmado no enunciado. De fato, resolvendo a equação 3, usando que  $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 1$  e  $a^2 = b^2 + c^2$ , obtemos que a raiz procurada é

$$\cos \alpha = \frac{a^2 b \sqrt{-a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^4 - b^2 c^2}}}{c^2 \sqrt{a^4 - c^2 x_1^2}}.$$

□

Um complemento do resultado acima, espécie de recíproca, é o seguinte fato.

**Proposição 2.** *Todo triângulo é uma órbita 3-periódica de um bilhar elíptico.*

*Demonstração.* Podemos tomar coordenadas cartesianas de tal modo que o triângulo  $\Delta$  seja definido pelos vértices  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (a_2, 0)$  e  $p_3 = (a_3, b_3)$ ,  $a_2 > 0$  e  $b_3 \neq 0$ .

Considere uma cônica  $\mathcal{C}$  definida implicitamente por  $h(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dy + ey + f = 0$ . Impondo a condição de que o triângulo  $\Delta = \{p_1, p_2, p_3\}$  seja uma órbita 3-periódica do bilhar associado a  $\mathcal{C}$  temos que  $h(p_i) = 0$  e  $\text{grad } h(p_i) = \nabla h(p_i)$  é o vetor direção da bissetriz de  $\Delta$  passando pelo ponto  $p_i$ . Fazendo os cálculos obtemos que a cônica é dada por

$$\begin{aligned} h(x, y) = & b_3^2 x^2 + (a_3^2 + a_3 |p_3 - p_2| - a_2 a_3 - |p_3| (a_3 - a_2)) y^2 \\ & - b_3 (|p_3 - p_2| - |p_3| + 2a_3 - a_2) xy - b_3^2 a_2 x + b_3 a_2 (a_3 - |p_3|) y = 0 \end{aligned}$$

Também temos que,

$$\begin{aligned} \det(\text{Hess}(h)) &= h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2 \\ &= 2b_3^2 [a_2 (a_3 - a_2 + |p_3|) - |p_3|^2 + |p_3 - p_2| (a_2 + |p_3|)] > 0. \end{aligned}$$

Como  $b_3 \neq 0$  e  $a_2 > 0$  temos que  $\text{Hess}(h)$  é uma forma quadrática positiva definida e portanto  $h(x, y) = 0$  é a equação de uma elipse. □

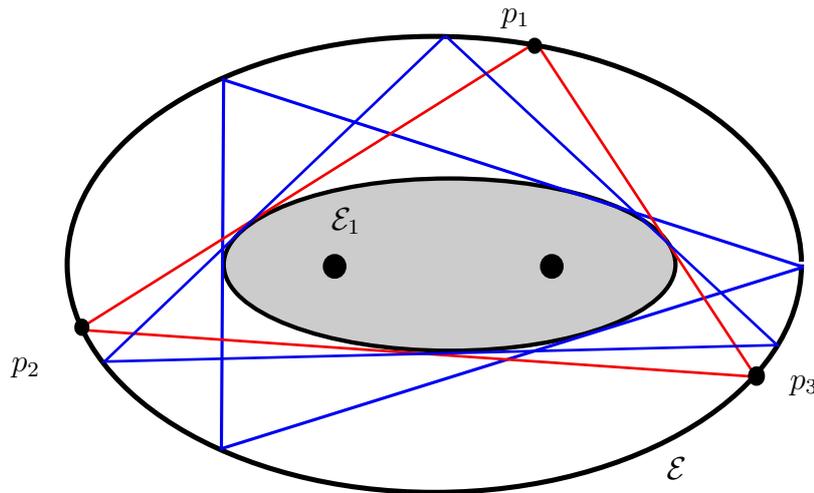
Pelo Teorema de Poncelet, temos que associada à dinâmica do bilhar 3-periódico descrito acima, os triângulos das órbitas são tangentes a uma única elipse  $\mathcal{E}_1$  confocal com a elipse  $\mathcal{E}$ . Para informações adicionais sobre o resultado descrito acima e o Teorema de Poncelet veja por exemplo [1], [3], [6], [7], [10] e [12].

Na proposição abaixo determinamos explicitamente a equação da elipse  $\mathcal{E}_1$ .

**Proposição 3.** *A elipse interna  $\mathcal{E}_1$  da dinâmica do bilhar 3-periódico, confocal com a elipse  $\mathcal{E}$ , é dada por*

$$\begin{aligned}
 h_1(x, y) &= \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0, \\
 a_1 &= \frac{-a(b^2 - \sqrt{b^4 - a^2b^2 + a^4})}{a^2 - b^2} > 0 \\
 b_1 &= \frac{b(a^2 - \sqrt{b^4 - a^2b^2 + a^4})}{a^2 - b^2} > 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Os focos de  $\mathcal{E}_1$  são dados por  $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0) = (\pm c, 0)$ .



**Figura 4:** Elipses confocais  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}_1$  e uma órbita triangular  $\{p_1, p_2, p_3\}$ .

*Demonstração.* Segue diretamente da Proposição 1. De fato, a órbita 3-periódica do ponto  $p_1 = (a, 0)$  é dada por

$$p_2 = \left( \frac{(b^2 - r)a}{a^2 - b^2}, p_{2y} \right) \quad \text{e} \quad p_3 = \left( \frac{(b^2 - r)a}{a^2 - b^2}, -p_{2y} \right),$$

onde

$$p_{2y} = -\frac{(a^2 + b^2 - 2r)(2a^4 - a^2b^2 + b^4 - 2ra^2)}{a^2 - b^2}, \quad r = \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}.$$



A família de elipses confocais a  $\mathcal{E}$  é definida por  $h(x, y, \lambda) = x^2/(a^2 - \lambda) + y^2/(b^2 - \lambda) = 1$ . Tendo que o ponto  $\left(\frac{(b^2 - \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})a}{a^2 - b^2}, 0\right)$  pertence à elipse interna, calculamos

$$\lambda = \frac{a^2b^2(-a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{(a^2 - b^2)^2}$$

e segue o resultado.  $\square$

**Lemma 1.** *O centro do círculo circunscrito ao triângulo  $\Delta = \{p_1, p_2, p_3\}$ ,  $p_i = (x_i, y_i)$ , é dado por  $(x_c, y_c)$ , onde*

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{2} \frac{(x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(y_3 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2)(y_1 - y_2)}{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}, \\ y_c &= \frac{1}{2} \frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_3 - x_2) + (x_2^2 + y_2^2)(x_1 - x_3) + (x_3^2 + y_3^2)(x_2 - x_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

*Demonstração.* Cálculo direto. Obtém-se a interseção entre as retas mediatrizes  $(p_1 + p_2)/2 + t(p_2 - p_3)^\perp$  e  $(p_1 + p_3)/2 + t(p_1 - p_3)^\perp$ , onde  $(p_i - p_j)^\perp$  é um vetor ortogonal ao vetor  $p_i - p_j$ .  $\square$

**Proposição 4.** *Seja  $C(p_1)$  o circuncentro do triângulo  $\Delta(p_1)$  que define a órbita 3-periódica do bilhar. Então  $C(p_1)$  é parametrizado por  $(x_c, y_c)$  onde*

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1}{a} \frac{A^3 x_1^2 + a_{02} y_1^2}{A^2 x_1^2 + B^2 y_1^2}, \quad y_c = \frac{y_1}{b} \frac{b_{20} x_1^2 + B^3 y_1^2}{A^2 x_1^2 + B^2 y_1^2}, \quad \text{com} \\ A &= \frac{a^2 - \sqrt{a^2 c^2 + b^4}}{2a}, \quad B = \frac{b^2 - \sqrt{a^2 c^2 + b^4}}{2b}, \\ a_{02}(a, b) &= \frac{a[(3a^3 + ab^2)A - b^2 c^2]}{4b^2}, \quad b_{20}(a, b) = \frac{b[(a^2 b + 3b^3)B + a^2 c^2]}{4a^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

*Demonstração.* Segue diretamente do Lema 1 e da Proposição 1.

Observamos que

$$x_c = \frac{x_1 F_1}{2a^2 F_3} = \frac{x_1}{2a^2} \frac{a_{20}(a, b)x_1^2 + a_{02}(a, b)y_1^2}{p(a, b)x_1^2 + q(a, b)y_1^2}$$

$$y_c = \frac{y_1 F_2}{2b^2 F_3} = \frac{y_1}{2b^2} \frac{b_{20}(a, b)x_1^2 + b_{02}(a, b)y_1^2}{p(a, b)x_1^2 + q(a, b)y_1^2}$$

$$a_{20}(a, b) = b_{02}(b, a), \quad a_{02}(a, b) = b_{20}(b, a),$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= (b^2(4a^4 - a^2b^2 + b^4)A_2 - a^2b^2(4a^4 - 3a^2b^2 + 3b^4))x_1^2 \\ &\quad + a^4((3a^2 + b^2)A_2 - 3a^4 + a^2b^2 - 2b^4)y_1^2 \\ F_2 &= (b^4(a^2 + 3b^2)A_2 - b^4(2a^4 - a^2b^2 + 3b^4))x_1^2 + (a^2(a^4 - a^2b^2 + 4b^4)A_2 \\ &\quad - a^2b^2(3a^4 - 3a^2b^2 + 4b^4))y_1^2 \\ F_3 &= (2a^2b^2A_2 - b^2(2a^4 - a^2b^2 + b^4))x_1^2 + (2a^2b^2A_2 - a^2(2b^4 + a^2c^2))y_1^2 \\ A_2 &= \sqrt{a^2(a^2 - b^2) + b^4} = \sqrt{a^2c^2 + b^4} \end{aligned} \tag{7}$$

Simplificando a equação acima obtemos o resultado afirmado.  $\square$

Em função dos eixos das elipses  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}_1$  temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.** *Seja  $C(p_1)$  o circuncentro do triângulo  $\Delta(p_1)$  que define a órbita 3-periódica do bilhar associado as elipses  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}_1$ . Então  $C(p_1)$  é parametrizado por  $(x_c, y_c)$  onde*

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 b^2 (b_1^2(b^4 - b^2a^2 + 4a^4) - b^6) x_1^2 + a^4 (b^2b_1^2 - b^4 + 3b_1^2a^2) y_1^2}{4 (b_1^2x_1^2 + a_1^2y_1^2)a^4b^2}, \\ y_c &= \frac{y_1 b^4 (a_1^2a^2 - a^4 + 3a_1^2b^2) x_1^2 + a^2 (a_1^2(a^4 - b^2a^2 + 4b^4) - a^6) y_1^2}{4 (b_1^2x_1^2 + a_1^2y_1^2)a^2b^4} \end{aligned} \tag{8}$$

*Demonstração.* Segue diretamente das Proposições 3 e 4.  $\square$



### 3 Curvatura afim de curvas planas

O grupo afim das transformações lineares do plano  $\mathbb{R}^2$  é gerado pelas translações e pelas transformações lineares invertíveis.

É também bastante natural, análogo ao caso euclidiano, considerar os conceitos de comprimento e curvatura de curvas que sejam “invariantes” pelo grupo afim especial (transformações lineares que preservam área).

Considere uma curva regular  $c(s) = (x(s), y(s))$  no plano afim  $\mathbb{A}^2$  munido da forma de área canônica  $\omega = dx dy$  e suponha que  $[c'(s), c''(s)] = 1$ . A notação  $[\cdot, \cdot]$  denota o determinante da matriz  $2 \times 2$  formada pelos vetores colunas. Isto é sempre possível quando  $c$  for uma curva localmente convexa (curvatura euclidiana positiva).

Derivando esta equação obtemos que  $[c'(s), c'''(s)] = 0$  e portanto, como estamos supondo  $c' \neq 0$ , temos que

$$c'''(s) + k_a(s)c'(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_a = [c''(s), c'''(s)].$$

A função  $k_a$  é denominada *curvatura afim* de  $c$ . Veja também [9] e [13].

Em relação a uma parametrização  $\gamma(u) = c(s(u))$  temos que

$$\begin{aligned} \gamma' &= c_s s' \\ \gamma'' &= c_{ss} s'^2 + c_s s'' \\ \gamma''' &= c_{sss} s'^3 + 3c_{ss} s' s'' + c_s s''' \end{aligned}$$

onde  $c_s = dc/ds$ ,  $c_{ss} = d^2c/ds^2$  e  $c_{sss} = d^3c/ds^3$ .

Além disso temos,

$$\begin{aligned} s'^3 &= [\gamma', \gamma''], \\ 3s'^2 s'' &= [\gamma', \gamma'''] \\ 6s' s''^2 + 3s'^2 s''' &= [\gamma', \gamma'''' ] + [\gamma'', \gamma'''] \end{aligned}$$

Logo, usando que  $k_a(s) = [c_{ss}, c_{sss}]$ , obtemos em função da parametrização  $\gamma$  que

$$k_a(u) = \frac{4[\gamma'', \gamma'''] + [\gamma', \gamma'''' ]}{3[\gamma', \gamma'']^{\frac{5}{3}}} - \frac{5[\gamma', \gamma''']^2}{9[\gamma', \gamma'']^{\frac{8}{3}}}.$$

Introduzindo a notação  $\gamma_{12} = [\gamma', \gamma'']$ ,  $\gamma_{13} = [\gamma', \gamma''']$ ,  $\gamma_{14} = [\gamma', \gamma'''' ]$ ,  $\gamma_{23} = [\gamma'', \gamma''']$ . Acima  $[u, v] = u_1 v_2 - u_2 v_1$  é o determinante da matriz formada pelos vetores  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$ .

Portanto, a curvatura afim  $k_a$  de  $\gamma$  é dada por

$$k_a = \frac{4\gamma_{23} + \gamma_{14}}{3(\gamma_{12})^{\frac{5}{3}}} - \frac{5(\gamma_{13})^2}{9(\gamma_{12})^{\frac{8}{3}}}. \quad (9)$$

**Observação 1.** A curvatura afim da elipse  $\mathcal{E}$  é igual  $1/(ab)^{\frac{2}{3}}$ .

## 4 Resultados Principais

Nesta seção descrevemos analiticamente o lugar geométrico dos centros dos círculos circunscritos associados a uma órbita triangular (3-periódica) de um bilhar elíptico.

**Proposição 6.** A curvatura afim,  $k_a$ , da curva determinada pelos centros dos círculos circunscritos é constante e é dada por

$$k_a^3 = \frac{1}{A^2 B^2}, \quad A = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}}{2a}, \quad B = \frac{b^2 - \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}}{2b}. \quad (10)$$

Portanto a curva  $\mathcal{E}_c$  é uma elipse.

*Demonstração.* Cálculos longos, verificados por computação algébrica, por exemplo maple, confirmam que a curvatura afim é constante e positiva.

De fato, usando a parametrização dada pela equação 7, fazendo  $x_1 = au$  e  $y_1 = b\sqrt{1-u^2}$  e a definição da curvatura afim, 9, temos que

$$k_a^3 = -\frac{16a^2 b^2 U^3}{V^8}, \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} U = & -36493 a^6 b^{18} - 6561 a^{22} b^2 - 38546 a^{20} b^4 - 36493 a^{18} b^6 - 62918 a^{16} b^8 \\ & - 67282 a^{14} b^{10} - 74444 a^{12} b^{12} - 67282 a^{10} b^{14} - 62918 a^8 b^{16} - 38546 a^4 b^{20} \\ & - 6561 a^2 b^{22} - 13122 a^4 - 13122 b^4 + 2 A_2 (b^2 + a^2) (81 b^8 - 20 b^6 a^2 \\ & + 134 b^4 a^4 - 20 b^2 a^6 + 81 a^8) (81 b^{12} + 20 b^{10} a^2 + 119 b^8 a^4 + 72 b^6 a^6 \\ & + 119 b^4 a^8 + 20 b^2 a^{10} + 81 a^{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & (27 a^8 + 20 b^2 a^6 + 34 b^4 a^4 + 20 b^6 a^2 + 27 b^8) A_2 \\ & - (b^2 + a^2) (27 b^8 - 20 b^6 a^2 + 50 b^4 a^4 - 20 b^2 a^6 + 27 a^8) \end{aligned}$$

e a equação acima fatora-se em  $k_a^3 = 1/(AB)^2$ .

Como a curvatura afim é constante e positiva temos que o lugar geométrico  $\mathcal{E} = \{C(p_1), p_1 \in \mathcal{E}\}$  é uma elipse. Veja por exemplo [8] e [9].  $\square$



**Teorema 1.** *O lugar geométrico  $\mathcal{E}_c = \{C(p_1), p_1 \in \mathcal{E}\}$  é uma elipse da forma  $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ , onde*

$$A = \frac{a^2 - \sqrt{a^2c^2 + b^4}}{2a}, \quad B = \frac{b^2 - \sqrt{a^2c^2 + b^4}}{2b}. \quad (11)$$

Os focos são  $(0, \pm \frac{c^3}{2ab})$ .

Em termos dos eixos  $a_1$  e  $b_1$  da elipse interna da dinâmica do bilhar  $\mathcal{E}_1$  (confocal com a elipse  $\mathcal{E}$ ) temos que  $4a^2b^2A^2 = c^4b_1^2$  e  $4a^2b^2B^2 = c^4a_1^2$ . Em particular  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{A}{|B|}$ .

Se  $a > b \geq \frac{a}{4} \sqrt{-1 + \sqrt{33}}$  a elipse  $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$  está contida na região delimitada por  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 6 temos que a curva procurada é uma elipse.

A mesma passa pelos pontos  $P_i$ , ( $i = 1, \dots, 5$ ) sendo  $P_1 = \gamma(a, 0)$ ,  $P_2 = \gamma(-a, 0)$ ,  $P_3 = \gamma(0, b)$ ,  $P_4 = \gamma(0, -b)$ ,  $P_5 = \gamma(a/2, b\sqrt{3}/2)$ .

Cálculos elementares, porém longos, mostram que a elipse tem a equação conforme enunciado. Com a hipótese de que  $a > b$ , temos que  $B^2 > A^2$  e  $C^2 = B^2 - A^2 = (a^2 - b^2)^3/4a^2b^2$ . Logo os focos são dados por  $(0, \pm C)$  com  $C = c^3/2ab$ .

Outra maneira de comprovar o resultado é observando que, definindo  $H(x, y) = x^2/A^2 + y^2/B^2 - 1$ , obtem-se  $H(x_c(a \cos t, b \sin t), y_c(a \cos t, b \sin t)) = 0$  por um cálculo direto.

As relações  $4a^2b^2A^2 = b_1^2c^4$  e  $4a^2b^2B^2 = a_1^2c^4$  seguem diretamente da definição das grandezas envolvidas.

A inequação  $B \leq b$  é equivalente a condição  $b \geq \frac{a}{4} \sqrt{-1 + \sqrt{33}}$ .  $\square$

**Proposição 7.** *A curva  $\gamma(t) = (x_c(t), y_c(t)) = (x_c(x_1, y_1), y_c(x_1, y_1))$ , sendo  $\Gamma(t) = (x_1, y_1) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , recobre a elipse  $\mathcal{E}_c$  três vezes.*

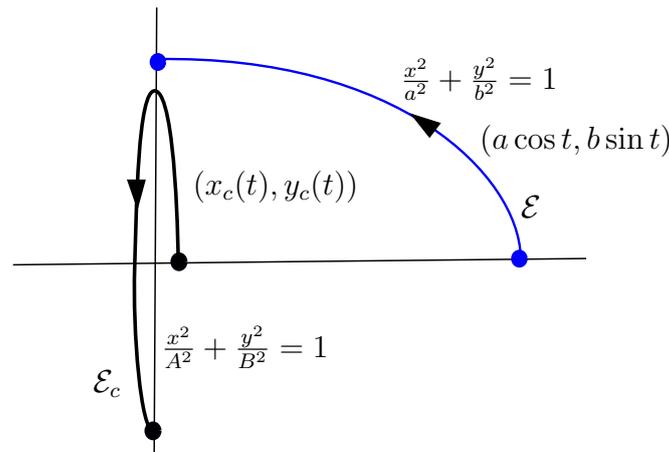
*Demonstração.* Uma explicação geométrica intuitiva para o recobrimento triplo da elipse  $\mathcal{E}_c$  pela elipse  $\mathcal{E}$  é o fato de que  $C(p_1) = C(p_2) = C(p_3)$ , onde denotamos por  $\Delta(p_1) = \{p_1, p_2, p_3\}$ ,  $\Delta(p_2) = \{p_2, p_3, p_1\}$  e  $\Delta(p_3) = \{p_3, p_1, p_2\}$  a órbita 3-periódica do bilhar.

Considere uma função racional  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  da forma

$$F(x, y) = \left( x \frac{ax^2 + by^2}{px^2 + qy^2}, y \frac{cx^2 + dy^2}{px^2 + qy^2} \right)$$

Temos que

$$\det(\text{Jac}(F)) = \frac{acx^4 + (3ad - bc)x^2y^2 + bdy^4}{(px^2 + qy^2)^2}.$$



**Figura 5:** Esboço das elipses  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}_c$  no intervalo  $[0, \pi/2]$ .

Aplicando o resultado do cálculo acima na parametrização da elipse dada pela equação 6 obtemos:

$$\det(\text{Jac}(F)) = \frac{P}{Q^2}$$

$$P = -(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)(\alpha x_1^2 + \beta y_1^2)$$

$$\alpha = b^2 (5 a^2 b^6 + 3 b^2 a^6 + 9 a^4 b^4 + 12 a^8 + 3 b^8) \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4} - b^2 (12 a^{10} + 4 a^2 b^8 + 3 b^{10} - 3 a^8 b^2 + 12 b^4 a^6 + 4 a^4 b^6)$$

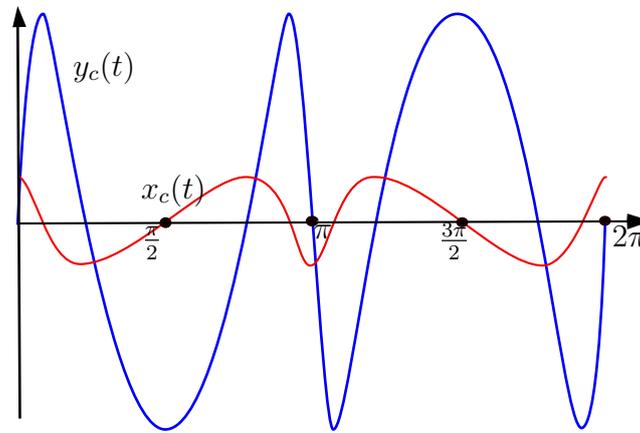
$$\beta = a^2 (12 b^8 + 5 b^2 a^6 + 3 a^8 + 9 a^4 b^4 + 3 a^2 b^6) \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4} - a^2 (3 a^{10} + 4 a^8 b^2 - 3 a^2 b^8 + 4 b^4 a^6 + 12 a^4 b^6 + 12 b^{10})$$

$$Q = 2ab^3 (-b^4 + a^2 b^2 - 2 a^4 + 2 a^2 \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}) x_1^2 + 2a^3 b (-a^4 + a^2 b^2 - 2 b^4 + 2 b^2 \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}) y_1^2$$

Pode-se comprovar, por manipulação algébrica, que  $\alpha < 0$  e  $\beta < 0$  e portanto  $\det(\text{Jac}(F)) > 0$  para  $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ . De fato,  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  se, e somente se,  $a = b$ .

Além disso, temos também que a função  $x_c(x_1, y_1) = x_c(t)$  se anula para  $x_1 = 0$  e  $y_1 = \pm k_1(a, b)x_1$ . O mesmo para a função  $y_c(x_1, y_1) = y_c(t)$  que se anula em  $y_1 = 0$  e  $y_1 = \pm k_2(a, b)x_1$ . Portanto cada função anula-se seis vezes no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Um exemplo típico que ilustra este comportamento é mostrado na Fig. 6.

Portanto,  $\gamma(t) = (x_c(a \cos t, b \sin t), y_c(a \cos t, b \sin t))$  recobre a elipse  $\mathcal{E}_c$  três



**Figura 6:** Gráfico das coordenadas  $x_c$  e  $y_c$  da elipse  $\mathcal{E}_c$ .

vezes. A Fig. 5 ilustra o percurso no intervalo  $[0, \pi/2]$  das duas curvas  $\Gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  e  $\gamma(t)$ .

□

A elipse interna  $\mathcal{E}_1$  de eixos  $a_1$  e  $b_1$  da dinâmica do bilhar 3-periódico é dada pela equação 4. A seguinte proposição mostra que dado a elipse interna podemos obter a elipse externa (eixos  $a$  e  $b$ ) do bilhar invertendo a função  $F(a, b) = (a_1, b_1)$ .

**Proposição 8.** A função  $F(a, b) = \left( \frac{-a(b^2 - \sqrt{b^4 - a^2 b^2 + a^4})}{a^2 - b^2}, \frac{b(a^2 - \sqrt{b^4 - a^2 b^2 + a^4})}{a^2 - b^2} \right)$  é um difeomorfismo global na região aberta  $R = \{(a, b) : a > 0, b > 0 \text{ e } a > b\}$ .

*Demonstração.* Cálculo direto mostra que  $\det(\text{Jac}(F)) > 0$  na região  $R$  e que  $F(R) \subset R$ . Portanto, pelo Teorema da Função Inversa,  $F$  é um difeomorfismo local. Para obter o resultado observamos que a equação  $F(a, b) = (x, y)$  é equivalente ao sistema  $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ ,  $bx + ay = ab$ . Com a hipótese  $x > y$ , as duas hipérbolas no plano  $ab$  possuem somente um ponto de interseção na região  $R$ . De fato, escrevendo  $c^2 = x^2 - y^2 > 0$  temos que  $b = ay/(a - x)$  e  $a$  satisfaz a equação polinomial  $p(a) = a^4 - 2a^3x + 2c^2ax - c^2x^2 = 0$  que possui uma única solução positiva. Isto segue do fato de que o discriminante da equação anterior vale  $-432x^4c^4(-x^2 + c^2)^2 < 0$  (veja [2]) e portanto a equação quártica  $p(a) = 0$  possui somente duas raízes reais, sendo que a raiz positiva na situação considerada acima é maior do que  $x$ .

□

## 5 Conclusão

Neste trabalho, inspirado no artigo [11], fizemos uma demonstração usando apenas ferramentas de geometria analítica real de que o lugar geométrico definido pelos centros dos círculos circunscritos aos triângulos de um bilhar elíptico é também uma elipse, denotada por  $\mathcal{E}_c$ . A principal contribuição é explicitar a equação canônica da elipse e mostrar que a elipse  $\mathcal{E}_c$ , como curva parametrizada, é recoberta três vezes pela elipse  $\mathcal{E}$  associada ao bilhar. A posteriori o cálculo da curvatura afim é desnecessário, mas o incluímos por acreditar que seja uma boa oportunidade de revisitar conceitos clássicos e poucos abordados nos cursos de graduação e mesmo de pós-graduação nos tempos atuais.

Também é observado no trabalho que a elipse interna  $\mathcal{E}_1$  do bilhar (confocal com a elipse inicial  $\mathcal{E}$ ) tem uma relação de proporcionalidade dos seus eixos com os eixos da elipse  $\mathcal{E}_c$ .

Uma explicação geométrica para o recobrimento triplo da elipse  $\mathcal{E}_c$  pela elipse  $\mathcal{E}$  é o fato de que  $C(p_1) = C(p_2) = C(p_3)$ , haja visto que os triângulos  $\Delta(p_1) = \{p_1, p_2, p_3\}$ ,  $\Delta(p_2) = \{p_2, p_3, p_1\}$  e  $\Delta(p_3) = \{p_3, p_1, p_2\}$  são iguais.

Por fim, observamos também que o lugar geométrico definido pelos baricentros, incentros e ortocentros dos triângulos (órbitas 3-periódicas do bilhar) são elipses. Veja [5].

As figuras foram produzidas com o software livre inkscape.

## Agradecimentos

O autor agradece aos pareceristas (anônimos) pelos relevantes comentários e suas sugestões ajudaram a melhorar a apresentação do texto. Na realização deste trabalho o autor foi parcialmente financiado pela FAPEG/CNPq/PRONEX (Proc. 20171026700508) e CNPq.

## Referências

- [1] CIMA, A.; GASULL, A. e MAÑOSA, V. On Poncelet's map, **Computers and Mathematics with Applications**, 60, p. 1457-1464, 2010.
- [2] BURNSIDE, W. S. e PANTON, A. W. **The Theory of Equations**, vol. 2, New York, Dover Publications, Inc. (1912).



- [3] DRAGOVIĆ, V. e RADNOVIĆ, M. Bicentennial of the great Poncelet theorem (1813–2013): current advances, **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, 51, p. 373–445, 2014.
- [4] FLATTO, L. Poncelet’s theorem, American Mathematical Society, Providence, RI, (2009). Chapter 15 by S. Tabachnikov.
- [5] GARCIA, R. **Bilhares elípticos e elipses associadas à sua dinâmica**. Em preparação.
- [6] GLAESER, G.; STACHEL H. e ODEHNAL, B. **The Universe of Conics, From the ancient Greeks to 21st century developments**. Springer Verlag (2016).
- [7] GRIFFITHS, P. e HARRIS, J. On Cayley’s explicit solution to Poncelet’s porism, **Enseign. Math.** (2), 24, no. 1-2, p. 31-40, 1978.
- [8] GUGGENHEIMER, H. **Differential Geometry**, New York, Dover Publications, (1977).
- [9] NOMIZU, K. e SASAKI T. Affine differential geometry. Geometry of affine immersions. **Cambridge Tracts in Mathematics**, 111. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994. xiv+263
- [10] PONCELET, J. V. **Traité des propriétés projectives des figures**. Metz, Paris (1822).
- [11] ROMASKEVICH, O. On the incenters of triangular orbits on elliptic billiards, **Enseign. Math.**, 60, no. 3-4, p. 247-255, 2014.
- [12] TABACHNIKOV, S. **Geometry and Billiards**, American Mathematical Society, Providence, RI, xii+176 (2005).
- [13] SPIVAK, M. **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry**, vol.III, Publish of Perish, Berkeley (1979).

---

Submetido em 19 nov. 2017

Aceito em 6 jun. 2018