[REEC] Revista Eletrônica de Engenharia Civil
DESENVOLVIMENTO·TECNOLOGIA·E·AMBIENTE
Volume 21, N° 1, 2026 63 - 99
https://revistas.ufg.br/reec

TRAVAMENTO NUMÉRICO DEVIDO À FORÇA CORTANTE EM ELEMENTOS FINITOS DE VIGA DE TIMOSHENKO

Shear locking in Timoshenko beam finite elements

Guilhermy Félix Santiago [1], **Kaio César Borges Benedetti**[2], **Arthur Álax de Araújo Albuquerque** [3]

PALAVRAS CHAVE:

Viga;
Timoshenko;
Shear Locking;
Elementos finitos;
Integração Reduzida;

KEYWORDS:

Beam;
Timoshenko;
Shear locking;
Finite elements;
Reduced integration.

RESUMO: Elementos de viga são elementos estruturais que apresentam esforços de flexão e cisalhamento. Entretanto, como a energia de deformação devida aos esforços de cisalhamento é pequena quando comparada a energia de deformação à flexão, é comum desconsiderá-la nas análises de caso de estruturas usuais. No entanto, para vigas com relação altura/comprimento elevadas a parcela da energia devida à força cortante passa a ter um efeito relevante, não podendo ser desprezada. Nesse contexto, o presente trabalho busca explorar formulações de elementos finitos de viga baseadas nas teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. É mostrado que os elementos finitos formulados a partir da teoria de Timoshenko apresentam problema de travamento numérico que acontece na parcela de energia de deformação da força cortante, chamado na literatura de *Shear Locking.* Para contornar esse problema três propostas são descritas neste trabalho, sendo elas: uso da integração reduzida seletiva, Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (CADFC) e a formulação apresentada por Gere e Weaver (GW). Os resultados analisados foram os deslocamentos, momentos fletores e as forças cortantes para uma viga engastada com um carregamento concentrado em sua extremidade. Foi possível concluir que o travamento de força cortante é solucionado pelos procedimentos citados, no entanto a taxa de convergência para cada formulação ocorre de forma diferente.

ABSTRACT: *Beam elements are structural elements that present bending and shear forces. Since the strain energy due to shear forces is small when compared to the strain energy due to bending, it is common to disregard it in case analyses of usual structures. However, beams with high height/length ratio, the portion of the energy due to the shear force starts to have a relevant effect and cannot be neglected. In this context, the present work seeks to explore beam finite element formulations based on the Euler-Bernoulli and Timoshenko theories. It is shown that the finite elements formulated from the Timoshenko theory present a numerical locking problem that occurs in the deformation energy portion of the shear force, called Shear Locking in the literature. To overcome this problem, three proposals are described in this work, namely: use of selective reduced integration, Assumed Shear Force Deformation Field (ASCDF) and the formulation presented by Gere and Weaver (GW). The results analysed were the displacements, bending moments and shear forces for a fixed beam with a concentrated load at its end. It was possible to conclude that the shear force locking is solved by the mentioned procedures, however the convergence rate for each formulation occurs differently.*

*** Contato com os autores:**

Publicado em 28 de junho de 2026

[1] **e-mail: guilhermyfelix@discente.ufg.br (G. F. Santiago)**
Engenheiro Civil pela Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA) da Universidade Federal de Goiás (UFG).
[3] **e-mail: kaiobenedetti@ufg.br (K. C. B. Benedetti)**
Eng. Civil, Doutor, Docente da Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA) da Universidade Federal de Goiás (UFG).
[3] **e-mail: arthuralax@ufg.br (A. A. A. Albuquerque)**
Eng. Civil, Doutor, Docente da Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA) da Universidade Federal de Goiás (UFG).

ISSN: 2179-0612 DOI: 10.5216/reec.V21i1.80417
© 2026 REEC - Todos os direitos reservados.

1. INTRODUÇÃO

No contexto da mecânica computacional, elementos de viga são elementos cujo comprimento é preponderantemente maior que as demais dimensões, sendo utilizados na análise de estruturas reticuladas planas submetidas a cargas externas pontuais e distribuídas que atuam perpendicularmente ao eixo longitudinal do elemento, efetivamente produzindo um acúmulo de energias de deformação interna de flexão e cisalhamento. O campo de deslocamentos é composto pelos deslocamentos transversais ao eixo longitudinal e a rotação das seções transversais. Essas características viabilizam o uso destes elementos por engenheiros na análise de modelos estruturais, possibilitando a determinação de configurações deformadas da estrutura e esforços internos (AZEVEDO, 2003; BATHE, 1996; SORIANO, 2003).

A depender da razão entre altura da seção transversal e comprimento do elemento (h/L), a parcela de energia interna de deformação associada à flexão pode ser relativamente maior que a correspondente à força cortante. Quanto menor a relação h/L, maior é a energia associada à flexão em relação à cisalhante, podendo a última ser negligenciada. Por outro lado, conforme se aumenta a relação h/L, a energia interna de deformação de cisalhamento pode influenciar na resposta da estrutura, devendo ser considerada neste caso. Na literatura não há definição clara para quais intervalos da relação h/L devem ser consideradas a energia de deformação ao cisalhamento, consequentemente para contornar esse impasse algumas teorias de vigas foram formuladas ao longo do tempo (ALBUQUERQUE, 2014; REDDY, 1997).

A teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli é formulada considerando como cinemática do elemento apenas o efeito de flexão. As hipóteses básicas assumidas na determinação das equações de equilíbrio admitem a partir de condições cinemáticas que as seções transversais rotacionam permanecendo planas e perpendiculares a linha neutra do elemento de viga. Por outro lado, a teoria de vigas de Timoshenko considera os efeitos das energias de flexão e cisalhamento. Igualmente à teoria de Euler-Bernoulli, as seções transversais rotacionam e permanecem planas quando o elemento é submetido a ação de forças externas, entretanto a seção não mais continua perpendicular a linha neutra. Neste caso, a rotação adicional que se considera na cinemática do elemento representa a distorção da seção transversal (REDDY, 2006).

Diante do exposto, como a teoria de vigas de Timoshenko considera parcelas adicionais de energia, que no caso é a de cisalhamento, leva-se a crer que a aplicação da cinemática de Timoshenko no desenvolvimento de formulação de elementos finitos de viga resultaria em elementos que, quando utilizados, apresentariam respostas satisfatórias frente ao comportamento esperado das estruturas independentemente da relação h/L. Em outras palavras, para relações de dimensões de vigas h/L pequenas, a parcela de energia de deformação interna relacionada ao cisalhamento apresentaria valores pequenos, e, portanto, desprezíveis a energia associada à flexão. Por outro lado, para relação h/L maiores a energia de deformação interna devida ao cisalhamento aumentaria, passando a ter efeito considerável na análise e, em qualquer um dos dois casos citados, a resposta encontrada representaria de forma adequada o comportamento da estrutura. Entretanto, elementos finitos de viga formulados a partir da teoria de Timoshenko apresentam o efeito de travamento numérico significando que as análises realizadas com estes elementos podem resultar em valores de deslocamentos e esforços internos inconsistentes (BAIER-SAIP ET AL. ,2020; DE ROSA ET AL. 2020).

Especificamente, a formulação do elemento finito de viga de Timoshenko apresenta o travamento numérico na parcela da matriz de rigidez relacionada à força cortante e por esse motivo, na literatura, esse fenômeno é conhecimento como travamento por força cortante ou ainda *shear locking*, em inglês. Diante desse problema, formulações alternativas que visam a correção desse efeito e consequentemente possibilite o uso desses elementos em quaisquer análises foram desenvolvidas ao longo dos anos. Em particular este trabalho apresenta algumas delas, tais como: integração reduzida seletiva, Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (CADFC) e Gere e Weaver (1987). A importância de se tratar desse assunto relaciona-se ao

fato de que o conhecimento sobre as características dos elementos utilizados em análise utilizando método dos elementos finitos afeta diretamente na qualidade da resposta obtida e, portanto, nas decisões de projeto. Nesse cenário, o presente trabalho se propõe, além de explorar algumas formulações alternativas de elementos finitos de viga discutindo suas características matemáticas, a mostrar respostas numéricas obtidas a partir da implementação dessas formulações.

2. OBJETIVO

O presente trabalho tem por objetivo discutir o problema de travamento numérico devido à força cortante na formulação de elementos finitos de viga baseada na teoria de Timoshenko, apresentando onde ocorre este fenômeno e descrevendo formulações alternativas presentes na literatura para desvencilhar este problema.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E CONTEXTUALIZAÇÃO

A utilização do Método dos Elementos Finitos em análise de estruturas tem se intensificado desde a década de 1950 possibilitando a análise de tensões e deformações de estruturas com geometrias complexas e condições de contorno das mais variadas. Desde então, com o intuito de viabilizar análises computacionais de modelos sofisticados estratégias numéricas de resolução de sistema de equações foram desenvolvidas assim como vários elementos finitos, tais como elementos de treliça, viga, chapa, placa e casca, como apresentados na literatura clássica Gallager (1975), Cook, Malkus e Plesh (1989), Bickford (1990), Bismarck-Nasr (1993), Bathe (1996) e Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005).

Com relação aos elementos finitos de viga eles podem ser desenvolvidos fundamentados nas teorias de viga de Euler-Bernoulli, Timoshenko ou ainda na teoria de vigas de terceira ordem, como apresentado em Reddy (1997). Os elementos finitos baseados na teoria de Euler-Bernoulli embora sejam bastante utilizados não apresentam respostas consistentes na análise dinâmica de vigas considerando elevadas frequências e de valores de deslocamentos e tensões em análise estática de vigas espessas tendo em vista que a cinemática do elemento não considera o efeito da energia relacionada a força cortante (DE ROSA ET AL. 2020; LI, WANG E ZHENG, 2023). Neste sentido, a aplicação de elementos de vigas baseadas na teoria de Timoshenko ou de ordens superiores passam a ser uma alternativa para se realizar estas análises.

Os elementos finitos de viga formulados a partir da teoria de Timoshenko possuem campos de deslocamentos transversais e rotações independentes acarretando, neste caso, a adoção de funções de aproximação distintas para cada campo. Ao se adotar o mesmo grau de aproximação para estes campos o elemento desenvolvido apresenta efeito de travamento por força cortante, ou *shear locking*, conforme discutido em Rakowski (1990), Reddy (2006) e Baier-Saip et al. (2020). Diante deste fato, um certo número expressivo de variações de formulações destes elementos no intuito de deixá-los livres do efeito de *shear locking* podem ser encontrados na literatura, tais como apresentadas em Nickel e Secor (1972), Tessler e Dong (1981), Heyliger e Reddy (1988), Rakowski (1991), Friedman e Kosmatka (1993), Reddy (1999), Soydas e Saritas (2013), Caillerie, Kotronis e Cybulski (2015), Hsu (2016), Lima e Faria (2016) e Amir, Papakonstantinou e Warn (2020).

O emprego da técnica de integração numérica reduzida e seletiva na obtenção da matriz de rigidez do elemento de Timoshenko é a alternativa de correção de travamento amplamente sugerida por vários autores, tais como Hughes, Cohen e Haroun (1978), Liu e Quek (2003) e Reddy (2006), e utilizada em códigos computacionais comerciais de elementos finitos como o Abaqus (2023) e Diana (2023). Basicamente, esta técnica se fundamenta na redução de número de pontos de integração aplicados na determinação da parcela da matriz de rigidez relacionada a força cortante. Esta técnica elimina espúrios de energia que estão presentes no campo de deformação de força cortante destes elementos e, por sua vez, viabiliza maior

flexibilidade nos elementos para análises que se desejam simular vigas com relação comprimento e altura pequena.

O uso de funções de aproximações consistentes para os campos de deslocamento e rotação do elemento é uma outra proposta que Prathap e Bhashyam (1982) e Babu e Prathap (1986) mostraram ser possível aplicar para sanar o problema de travamento. Neste caso, adota-se para o campo de deslocamento transversal uma função de aproximação de um grau maior que aquela considerada para a rotação. Este procedimento resulta em um elemento com nós internos que apresentam apenas um grau de liberdade, neste caso o deslocamento transversal. No intuito de contornar esta característica e utilizar o elemento que tenham sempre dois graus de liberdade por nó, caso se deseje, é possível utilizar a técnica de condensação estática que permite escrever o grau de liberdade de translação em função dos deslocamentos e rotações dos demais graus de liberdade.

Soriano (2003) expõe o método da restrição que consiste em escolher pontos específicos no interior do elemento finito e a partir deles utilizando campo de deformação de força cortante determinar as funções de forma para a aproximação do campo de deslocamento do elemento.

Noor e Peters (1981) propuseram elementos finitos de viga a partir de formulação mista a fim de evitar o efeito de *shear loncking*. Nesse caso, ao invés da aplicação do funcional de energia potencial total o funcional de energia de Hellinger-Reissner é adotado para se descrever o equilíbrio do problema e se determinar a matriz de rigidez do elemento. Shimodaira (1985) mostra que a matriz de rigidez obtida por modelos mistos é idêntica a calculada utilizando integração reduzida seletiva. Ergüven e Gedikli (2003) aplicam a formulação mista considerando como variáveis primárias os deslocamentos e os momentos fletores nos nós do elemento. Os autores ressaltam que a vantagem básica desta metodologia é que, além dos deslocamentos, os momentos fletores são obtidos diretamente a partir da solução do sistema de equações de equilíbrio.

Hughes e Tezduyar (1981), Choi e Lim (1995), Soriano (2003) e Albuquerque (2014) sugerem o uso de procedimento relacionado a modificação da função de aproximação do campo de deformação cisalhante chamando esta metodologia de Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (CADFC). Os autores mostram que uma vez aplicada esta metodologia em elementos de dois ou três nós é possível eliminar o efeito de travamento nos elementos de viga de Timoshenko.

Neves (2000) demonstra de forma mais genérica utilizando o método da energia a matriz de rigidez do elemento finito de Timoshenko obtida por Gere e Weaver (1987) livre do efeito de travamento. Nesta formulação assume-se que a flecha total da viga corresponde aos esforços de flexão e cisalhamento e a função de aproximação para a rotação é obtida a partir da equação que define o campo de deformação de força cortante da estrutura.

4. FORMULAÇÃO

Os tópicos a seguir apresentam as formulações de elementos finitos baseadas nas teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Sucintamente, a formulação de qualquer elemento finito envolve: (i) a determinação da equação de equilíbrio do elemento, que pode ser determinada a partir da variação da energia potencial total composta pela soma das energias de deformação interna e das forças externas; (ii) a determinação da relação constitutiva do elemento, que neste trabalho é utilizada a Lei de Hooke; (iii) a definição da equação de compatibilidade; e, por último, (iv) a especificação das funções de aproximação do campo de deslocamentos. As premissas da formulação de elementos finitos podem ser verificadas em Bathe (1996), Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), Azevedo (2003) e Soriano (2003).

4.1 ELEMENTO FINITO DE ACORDO COM A TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

A energia potencial total do elemento de viga (Π) baseada na teoria de Euler-Bernoulli de um elemento com (n) nós e comprimento (l) é dada a partir da soma da energia interna de deformação devido à flexão (U^f) e da energia potencial das forças externas (P), conforme mostrado na Equação (1).

$$\Pi = U^f + P = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_x \sigma_x dV - \sum_{i=1}^{n} f_i w_i - \sum_{i=1}^{n} M_i \theta_i - \int_l q w dx \tag{1}$$

em que ε_x e σ_x são a deformação e tensão normal à seção transversal da viga, respectivamente; f_i e M_i são forças e momentos fletores concentrados nos nós *i*; q é o carregamento transversal distribuído ao longo do elemento; w_i e θ_i os deslocamentos transversais e as rotações dos nós *i*; e w a função de deslocamento transversal.

A cinemática do elemento finito de viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli considera que seções planas permanecem planas e perpendiculares à linha neutra para um elemento deformado. As relações matemáticas (2) expressam essas considerações entre os deslocamentos longitudinais, transversais e rotação (u, w e θ, respectivamente).

$$u = z\theta \text{ e } \theta = \frac{dw}{dx} \tag{2}$$

As equações (3) correspondem a equação de compatibilidade que descreve a relação entre deslocamentos (u) e deformações (ε_x), e a relação constitutiva que relaciona tensão (σ_x) e deformação encontram-se, respectivamente.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \text{ e } \sigma_x = E\varepsilon_x \tag{3}$$

sendo, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Inserindo o resultado das manipulações algébricas envolvendo as Equações (2) e (3) na Equação (1), a energia potencial total do elemento de viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli resulta na Equação (4).

$$\Pi = \int_l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - f_1 w_1 - \sum_{i=1}^{n} f_i w_i - \sum_{i=1}^{n} M_i \theta_i - \int_l q w dx \tag{4}$$

com $I = \int_A z^2 dA$ sendo o momento de inércia da seção transversal e demais termos já definidos anteriormente.

<u>Funções de aproximação</u>

Considerando o elemento finito de viga com dois nós e, portanto, quatro graus de liberdade no total, a função de aproximação dos deslocamentos transversais é cúbica. A Equação (5) apresenta a função de aproximação dos deslocamentos transversais em função das funções de forma ($\mathbf{N}$) e graus de liberdade do elemento ($\mathbf{d}$).

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)\theta_2 + N_3(\xi)w_2 + N_4(\xi)\theta_2 = \mathbf{N}^T\mathbf{d} \tag{5}$$

Em que,

$$\mathbf{N}=\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right)\\\frac{1}{4}\left(-1+\xi\right)^2\left(1+\xi\right)\\\frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right)\\\frac{1}{4}\left(-1+\xi\right)\left(1+\xi\right)^2\end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}w_1\\\theta_1\\w_2\\\theta_2\end{Bmatrix} \tag{6}$$

Na qual ξ são coordenadas isoparamétricas que variam entre -1 a 1.

<u>Equação de equilíbrio e Matriz de rigidez do elemento</u>

Utilizando a função de aproximação, Equação (5), na Equação (4), a energia potencial total do elemento é escrita em função dos graus de liberdade do elemento conforme a Equação (7).

$$\Pi=\mathbf{d}^T\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T EI\mathbf{B}J\,d\xi\mathbf{d}-\sum_{i=1}^{2}f_i w_i-\sum_{i=1}^{2}M_i\theta_i-\int_{-1}^{1}q\mathbf{N}J\,d\xi\mathbf{d} \tag{7}$$

sendo a matriz $\mathbf{B}=d^2\mathbf{N}/dx^2$. No desenvolvimento das equações foi adotado o jacobiano $J=dx/d\xi$ que define a relação entre as coordenadas cartesianas (x) e as coordenadas isoparamétricas (ξ) do elemento.

O sistema de equações de equilíbrio Equação (8) pode ser obtida a partir do princípio da estacionariedade da energia potencial total.

$$\mathbf{k}\,\mathbf{d}=\mathbf{f} \tag{8}$$

na qual a matriz de rigidez do elemento ($\mathbf{k}$) e o vetor de força ($\mathbf{f}$) são calculados conforme as Equações (9) e (10), respectivamente.

$$\mathbf{k}=\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T EI\mathbf{B}J\,d\xi \tag{9}$$

$$\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{n}f_i+\sum_{i=1}^{n}M_i+\int_{-1}^{1}q\mathbf{N}J\,d\xi \tag{10}$$

4.2 ELEMENTO FINITO DE ACORDO COM A TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

A energia potencial total do elemento de viga de Timoshenko é dada a partir da soma das energias interna de deformação devido à flexão (U^f) e força cortante (U^c) enquanto a energia potencial das forças externas (P) é escrita de forma análoga ao que foi apresentado para o elemento de Euler Bernoulli, conforme mostrado na Equação (11).

$$\Pi=U^f+U^c+P=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_x\sigma_x dV+\frac{1}{2}\int_V\beta\tau_{xy}dV-\sum_{i=1}^{n}f_i w_i-\sum_{i=1}^{n}M_i\theta_i-\int_l qw dx \tag{11}$$

em que *n* é o número de nós do elemento.

As deformações longitudinais e distorção (ε_x,β) e as tensões normais e de cisalhamento (σ_x,τ_{xy}) devidas à flexão e ao cisalhamento são expressas conforme apresentado nas Equações (12) e (13), respectivamente.

$$\varepsilon_x=-y\frac{d\theta}{dx} \text{ e } \beta=\frac{dw}{dx}-\theta \tag{12}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \text{ e } \tau_{xy} = G\beta \tag{13}$$

Em que y corresponde à coordenada da seção transversal a partir da linha neutra, G módulo de rigidez transversal e demais variadas já definidas anteriormente.

Substituindo as Equações (12) e (13) na Equação (11) a energia de deformação interna pode ser apresentada conforme a Equação (14).

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) GKA\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) dx - \sum_{i=1}^{n} f_i w_i - \sum_{i=1}^{n} M_i \theta_i - \int_l qw dx \tag{14}$$

Funções de aproximação

Diferentemente do elemento finito baseado na teoria de Euler-Bernoulli, as funções de aproximação para os deslocamentos transversais e as rotações do elemento baseado na teoria de Timoshenko são consideradas independentes. Neste caso, as rotações não são determinadas a partir das derivadas dos deslocamentos transversais. Deste modo, as funções de aproximação são definidas conforme Equação (15).

$$w = \mathbf{N}_w^T \mathbf{d} \text{ e } \theta = \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{d} \tag{15}$$

Onde,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix},\ \mathbf{N}_w^T = \begin{Bmatrix} N_{wi} & 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{N}_\theta^T = \begin{Bmatrix} 0 & N_{\theta i} \end{Bmatrix}, \text{ com } i = 1\text{K}\ n \tag{16}$$

Matriz de rigidez

Substituindo as funções da Equação (15) na Equação (14), tem-se a energia potencial total do elemento escrita conforme Equação (17).

$$\Pi = \mathbf{d}^T \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_f^T EI \mathbf{B}_f J d\xi + \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_c^T GKA \mathbf{B}_c J d\xi\right)\mathbf{d} - \sum_{i=1}^{n} f_i w_i - \sum_{i=1}^{m} M_i \theta_i - \int_{-1}^{1} q\mathbf{N}_w J d\xi \mathbf{d} \tag{17}$$

Em que $\mathbf{B}_f = dN_i / dx$ e $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_f - \mathbf{N}_\theta$.

A matriz de rigidez do elemento é, portanto, calculada de acordo com a Equação (18). Destaca-se que a rotina de cálculo implementada no Fortran se encontra detalhada no ANEXO B.

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_f^T EI \mathbf{B}_f J d\xi + \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_c^T GKA \mathbf{B}_c J d\xi \tag{18}$$

Ao se adotar funções de aproximação independentes e de mesma ordem para o deslocamento transversal (w) e a rotação (θ), o campo de deformação de força cortante ($\mathbf{B}_c$) da Equação (18) apresenta inconsistência. Essa inconsistência resulta de restrições chamadas espúrias que impedem a representação adequada do comportamento do elemento. Além disso, observa-se que a parcela de flexão da matriz de rigidez apresenta uma ordem de decrescimento maior do que a parcela de cisalhamento ao se adotar razões menores entre a altura/comprimento da viga, uma vez que ambas as parcelas estão em função da inércia e área da seção transversal, respectivamente. A partir das considerações citadas, os elementos finitos apresentam rigidezes maiores do que o esperado à medida que se diminui a altura da seção transversal da viga. Como consequência, os elementos apresentam retardo no processo de convergência de resultados durante as análises evidenciando o problema de travamento numérico, e como no caso está relacionado a força cortante é especificado como travamento de força cortante ou *Shear Loncking.*

A utilização da integração reduzida seletiva é uma das propostas sugeridas para desvencilhar o travamento de força cortante. Além desta técnica, neste trabalho também foram utilizadas a metodologia

relacionada ao Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (CADFC) e a matriz de rigidez apresentada em Gere e Weaver (1987), cujas formulações encontram-se nos tópicos 4.2.1 e 4.2.2 a seguir.

4.2.1 Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (CADFC)

A formulação do elemento finito de viga considerando um Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (CADFC) não altera a parcela de flexão. Neste sentido, a parcela da matriz de rigidez apresentada na equação (18) relacionada à flexão permanece a mesma. Por outro lado, o campo de deformação de força cortante ($\mathbf{B}_c$) sofre modificação e, consequentemente, a parcela de rigidez à força cortante também. A seguir são apresentados os cinco passos necessários para se determinar o novo campo de deformação de força cortante consistente ($\mathbf{B}_c^{consistente}$).

a) Definição da aproximação dos campos de deslocamentos e rotação.

Esta etapa consiste na obtenção das funções de forma do elemento finito, procedimento análogo ao desenvolvimento da expressão (15). A partir destas aproximações determinam-se os campos de deformação devido à flexão e à força cortante $\mathbf{B}_f$ e $\mathbf{B}_c$, respectivamente, termos existentes na equação (18).

b) Definição da aproximação do campo assumido de deformação.

Como os esforços internos são obtidos a partir de derivadas dos deslocamentos e rotações, o grau de aproximação do elemento para os esforços internos é considerado com um grau de aproximação inferior. Neste sentido, para o elemento linear, a força cortante possui equação de aproximação constante, enquanto para o elemento quadrático a força cortante possui equação de aproximação linear.

c) Definição dos pontos de amarração

Pontos de amarração são pontos em que são compatibilizados os resultados entre o campo assumido de deformação consistente ($\mathbf{B}_c^{consistente}$) e o campo de deformação definido pelos campos de deslocamentos e rotações ($\mathbf{B}_c$). Considerando formulações de elementos finitos paramétricas, as coordenadas dos pontos de amarração correspondem às coordenadas dos pontos de integração que são os pontos de melhor acurácia entre as aproximações dos dois campos ($\mathbf{B}_c^{consistente}$ e $\mathbf{B}_c$), (SORIANO, 2003). Além disso, os pontos de amarração também são utilizados para se determinar as funções de aproximação ($\mathbf{N}_{as}$) discutidas no item ***b)***.

A **FIGURA 1** apresenta os pontos de amarração (**x**) para os elementos lineares e quadráticos assim como as funções de aproximação.

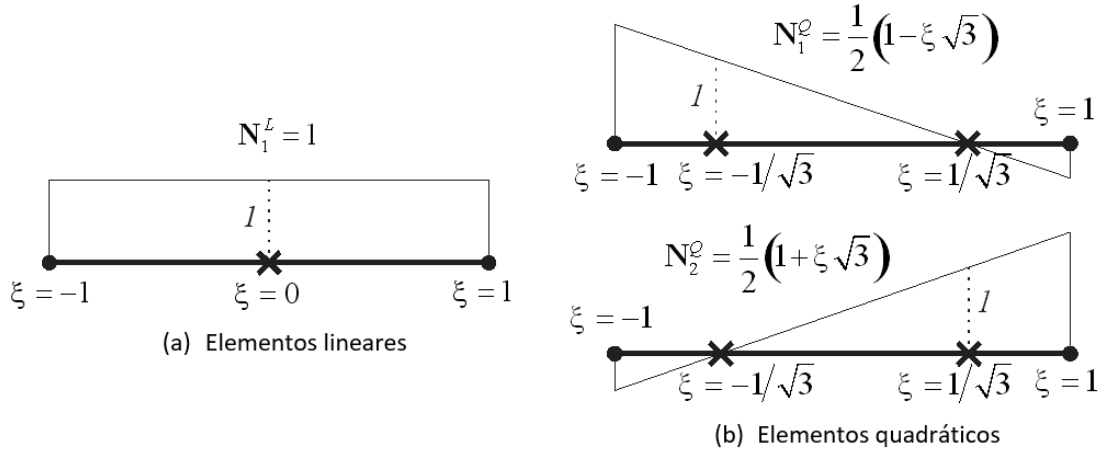

FIGURA 1: Pontos de amarração e suas coordenadas: (a) elementos lineares e (b) elementos quadráticos.

Considerando as coordenadas dos pontos de amarração previamente mostrados, as funções de aproximação ($\mathbf{N}_{as}$) utilizadas para se determinar o campo assumido consistente de deformação à força cortante para os elementos lineares e quadráticos são definidas nas Equações (19) e (24), respectivamente.

$$\mathbf{N}_{as} = \left[N_1^L \right] = \left[1 \right] \tag{19}$$

$$\mathbf{N}_{as}^T = \left[N_1^Q \quad N_2^Q \right] = \left[\frac{1}{2}\left(1-\xi\sqrt{3}\right) \quad \frac{1}{2}\left(1+\xi\sqrt{3}\right) \right] \tag{20}$$

d) Determinação das deformações tangenciais nos pontos de amarração.

As deformações tangenciais nos pontos de amarração ($\mathbf{B}_c^{pontosamarração}$) são definidas utilizando o campo de deformação de força cortante obtido a partir do campo de deslocamentos e rotações ($\mathbf{B}_c$) calculado nos pontos de amarração, conforme Equação (21).

$$\mathbf{B}_c^{pontosamarração} = \mathbf{B}_c\left(\xi, \eta\right) \tag{21}$$

e) Definição do campo assumido de deformação de força cortante

A obtenção do campo assumido de deformação consistente ($\mathbf{B}_c^{consistente}$) é feita ao se distribuir os valores das deformações tangenciais obtidos nos pontos de amarração a partir das funções de aproximação definidas no item ***c)***, conforme mostra a Equação (22).

$$\mathbf{B}_c^{consistente} = \mathbf{N}_{as}\mathbf{B}_c^{pontosamarração} \tag{22}$$

Uma vez obtido o CADFC consistente ($\mathbf{B}_c^{consistente}$) a matriz de rigidez do elemento é obtida com a Equação (18) agora considerando $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_c^{consistente}$.

4.2.2 Gere e Weaver

Considerando a cinemática da viga de Timoshenko, o deslocamento transversal total (w) é resultado da soma dos deslocamentos devido à flexão e à força cortante (w_f, w_c), conforme apresentado na Equação (23).

$$w = w_f + w_c \Rightarrow \frac{dw}{dx} = \frac{dw_f}{dx} + \frac{dw_c}{dx} \tag{23}$$

A partir da teoria das estruturas sabe-se que a derivada do momento fletor (*M*) é a força cortante (*V*) e a derivada da força cortante é menos o carregamento atuante *q* no elemento de viga, expressões mostradas em (24). Sabe-se também que o momento fletor e a força cortante em uma seção transversal é dada pelas Equações (25) e (26).

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad \text{e} \quad \frac{dV(x)}{dx} = -q \tag{24}$$

$$M(x) = -EI\frac{d\theta(x)}{dx} \tag{25}$$

$$V(x) = \tau kA \tag{26}$$

A partir das Equações (23), (24) e (25) e considerando um elemento sem carregamento distribuído, apenas com cargas de força e momento concentrados nos nós, é possível estabelecer que a derivada terceira da função de aproximação que descreve a rotação do elemento tem valor nulo, conforme demonstrado em (27).

$$\frac{d}{dx}\left[-EI\frac{d\theta(x)}{dx}\right] = V(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left[-EI\frac{d\theta(x)}{dx}\right] = \frac{dV(x)}{dx} \Rightarrow \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = 0 \tag{27}$$

Diante da Equação (27) desenvolvida, deve-se assumir, portanto, aproximação quadrática para a função de rotação. Considerando aproximação quadrática para a função de rotação, as Equações (23), (24), (25) e (26) e o sistema de coordenadas isoparamétricas é possível demonstrar que as funções de aproximação de deslocamento ($\mathbf{N}_w$) e rotação ($\mathbf{N}_\theta$) são escritas de acordo com a Equação (28).

$$\mathbf{N}_w = \begin{Bmatrix} \frac{(-1+\xi)(-2+\xi+\xi^2-4g)}{4+8g} \\ \frac{L(-1+\xi^2)(-2+\xi-2g)}{8+16g} \\ \frac{2+3\xi-\xi^3+4g+4g\xi}{4+8g} \\ \frac{L(-1+\xi^2)(1+\xi+2g)}{8+16g} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_\theta = \begin{Bmatrix} \frac{3(-1+\xi^2)}{2L(1+2g)} \\ \frac{(-1+\xi)(1+3\xi-4g)}{4+8g} \\ \frac{3-3\xi^3}{2L(1+2g)} \\ \frac{(1+\xi)(-1+3\xi+4g)}{4+8g} \end{Bmatrix} \tag{28}$$

em que a constante $g = 6EI/kGAL^2$.

Considera-se, portanto, as funções de forma da Equação (28) para descrever os campos de deslocamentos transversais e as rotações, que por sua vez inseridos na energia potencial total da Equação (11), chega-se à matriz de rigidez ($\mathbf{k}$) do elemento conforme apresenta a Equação (29).

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_f^T EI \mathbf{B}_f J d\xi + \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_c^T \frac{6EI}{gl^2} \mathbf{B}_c J d\xi \tag{29}$$

em que o termo $6EI/gL^2 = GkA$ e $\mathbf{B}_f$ e $\mathbf{B}_c$ são explicitados nas Equações (30) e (31).

$$\mathbf{B}_f^T = \left\{ \frac{6csi}{L^2(1+2g)} \quad \frac{-1+3csi-2g}{L(1+2g)} \quad -\frac{6csi}{L^2(1+2g)} \quad \frac{1+3csi+2g}{L(1+2g)} \right\} \tag{30}$$

$$\mathbf{B}_c^T = \left\{ -\frac{2g}{L(1+2g)} \quad -\frac{g}{1+2g} \quad \frac{2g}{L(1+2g)} \quad -\frac{g}{1+2g} \right\} \tag{31}$$

5. RESULTADOS

A viga em balanço mostrada na **FIGURA 2** possui um vão de 3m, módulo de elasticidade de 20GPa, coeficiente de Poisson igual a zero e está submetida ao carregamento P localizado na extremidade livre e de valor igual a 10kN. Para analisar o travamento da força cortante nos elementos finitos de viga estudados neste trabalho, manteve-se constante a dimensão da base da viga em 0,2m e variou-se a altura (h) da seção transversal. As alturas consideradas resultam em relações h/L iguais a 0,1, 0,3, 0,5, e 0,7.

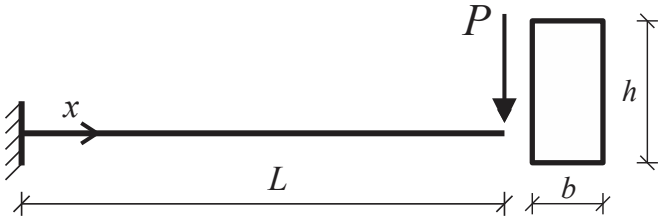

FIGURA 2: viga engastada com carga concentrada P na extremidade

A fim de comparar os valores obtidos nas simulações numéricas a Tabela 1 presenta os valores de deslocamentos analíticos na extremidade livre da viga obtidos com as equações (32) e (33), que são expressões analíticas que mostram os deslocamentos da estrutura ao longo do eixo x. O deslocamento (v_f), primeira expressão, obtido considerando apenas energia de deformação devida à flexão, e o deslocamento (v_{fc}) obtido considerando parcelas de energia de deformação tanto a flexão como ao cisalhamento.

$$v_f(x) = \frac{Pl^3}{3EI} \tag{32}$$

$$v_{fc}(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2 x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^3}{2IG}(l-x) \tag{33}$$

TABELA 1: Deslocamentos obtidos com as expressões analíticas. (L=3000 mm).

h (mm)	h/L	$v_f(L)$	$v_{fc}(L)$	Diferença relativa
300	0,1	-1,00E+01	-1,01E+01	1%
900	0,3	-3,70E-01	-3,95E-01	7%
1500	0,5	-8,00E-02	-9,50E-02	19%
2100	0,7	-2,92E-02	-3,99E-02	37%

FONTE: Autoria Própria.

É possível perceber que à medida que se aumenta a relação h/L a diferença relativa entre os deslocamentos $v_f(L)$ e $v_{fc}(L)$ também aumenta. Isso comprova que para alturas maiores de vigas a energia associada à deformação por cisalhamento passa a ser uma parcela significativa na energia de deformação total da estrutura.

A FIGURA 3 mostra curvas de deslocamento na extremidade em balanço da viga *versus* número de nós para todos os elementos finitos implementados e para todas as relações h/L consideradas. No intuito de facilitar a leitura da legenda dos gráficos a Tabela 2 detalha o significado das siglas utilizadas para especificar o tipo de elemento finito formulado considerando a teoria de vigas de Timoshenko.

TABELA 2: Elementos finitos de com formulação de vigas de Timoshenko.

Sigla	**Descrição do elemento**
TILIC	Timoshenko Linear Integração Completa
TLIR	Timoshenko Linear Integração Reduzida
TLCADFC	Timoshenko Linear com Campo Assumido de Deformação de Força Cortante
TGW	Timoshenko Gere Weaver
TIQIC	Timoshenko Linear Integração Completa
TQIR	Timoshenko Linear Integração Reduzida
TQCADFC	Timoshenko Linear com Campo Assumido de Deformação de Força Cortante

FONTE: Autoria Própria.

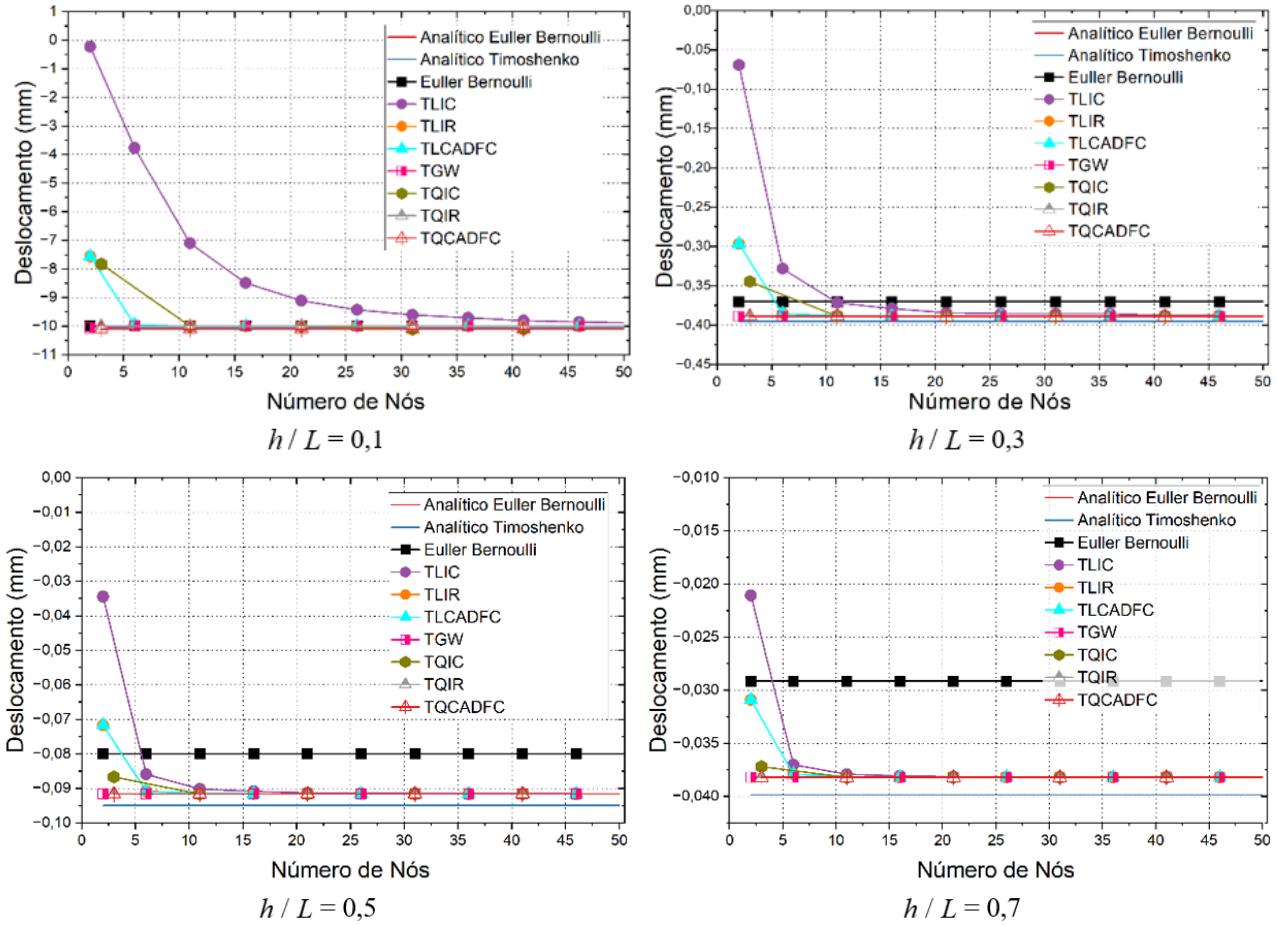

FIGURA 3: Curvas de convergência de malha para o deslocamento.

É possível observar que os valores obtidos via MEF convergem ao valor analítico. Entretanto, a velocidade de convergência dos elementos desenvolvidos a partir das teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko são diferentes. O resultado do elemento finito Euler-Bernoulli é igual ao valor analítico $v_f(L)$ para qualquer relação h/L. Isso acontece por dois motivos: (i) o elemento finito de Euler-Bernoulli é construído considerando funções de forma com aproximação cúbica, que é a mesma ordem de aproximação da expressão analítica para v_f; e (ii) a formulação do elemento de Euler-Bernoulli considera apenas a parcela de energia de deformação à flexão, análogo a expressão de v_f.

Os deslocamentos obtidos considerando elementos finitos determinados a partir da teoria de Timoshenko precisam de uma quantidade maior de elementos para alcançar o resultado teórico para qualquer relação h/L. Isso ocorre porque estes elementos finitos foram construídos a partir de aproximações de funções de forma lineares e quadráticas, ou seja, diferentes da aproximação cúbica da função analítica. Considerando este fato, constata-se que em todos os gráficos os deslocamentos obtidos com os elementos finitos Timoshenko com aproximação quadrática (TQIC, TQIR, TQCADFC) convergem mais rapidamente. Por exemplo, para a razão *h/L* igual a 0,1 o elemento Timoshenko Linear Integração Completa (TLIC) e Timoshenko Quadrático Integração Completa (TQIC) precisam de 86 e 11 nós, respectivamente, para convergir ao valor analítico.

Ressalta-se também que a razão de convergência para elementos que possuem o mesmo grau de aproximação formulados a partir da teoria de Timoshenko é diferente. Este fato é comprovado ao comparar

o elemento Timoshenko Integração Linear Completa (TLIC) com o elemento Timoshenko Integração Linear Integração Reduzida (TLIR). Ambos convergem ao valor analítico esperado, porém o TLIR converge com 11 nós enquanto o TLIC com 86 nós para a relação h/L de 0,1. Para os elementos quadráticos com integração completa (TQIC) e reduzida (TQIR) a convergência ocorre para 11 nós, em ambos. Este fato evidencia o fenômeno de travamento numérico de força cortante (*Shear Locking*). Os elementos finitos baseados na teoria de Timoshenko superestima a rigidez da estrutura para relações h/L pequenas devida à energia de deformação ao cisalhamento.

Ainda de acordo com os gráficos da FIGURA 3, os elementos de Gere e Weaver (TGW), Timoshenko Quadrática Integração Reduzida e com Campo Assumido de Deformação de Força Cortante (TQCADFC) apresentam convergência para qualquer discretização. Cabe salientar que o elemento TGW o campo de deslocamento adotado é cúbico e é obtido considerando as equações de resistência dos materiais. Outro fato interessante, é que os elementos lineares TLIR e TLCADFC e os quadráticos TQIR e TQCADFC apresentaram o mesmo comportamento. Este fato comprova que o artifício numérico da integração reduzida equivale a definir um campo de deformação consistente.

A **FIGURA 4** apresenta o comportamento do momento fletor no engaste. Diferentemente dos deslocamentos, ao se mudar a relação h/L em todos os casos os valores convergem para o valor teórico de momento fletor 30,0 kNm. Isso mostra que os valores dos esforços internos não dependem da geometria da seção transversal da estrutura. Além disso, contata-se também que o momento fletor obtido com os elementos de Euller-Bernoulli, Timoshenko Integração Quadrática Reduzida e Timoshenko Quadrático assumindo Campo de Deformação por Força Cortante (TIQR e TQCADFC) são iguais ao teórico para qualquer discretização. Isso ocorre porque o grau de aproximação do momento fletor na formulação destes elementos é linear, o que coincide com a ordem de aproximação da distribuição de momento fletor desta estrutura. Destaca-se ainda que dentre os elementos construídos a partir da teoria de Timoshenko aquele que necessita de um número maior de elementos para se apresentar convergência de resultado é o elemento de Timoshenko Linear com Integração Completa (TLIC). A justificativa deste comportamento é que o grau de aproximação de momento fletor para este elemento é constante, e como já discutido anteriormente, este elemento apresenta problema de travamento numérico devido a força cortante. As curvas também mostram que o elemento TQIC apresenta também o problema de travamento, entretanto este efeito é atenuado com fato de o grau de aproximação da força cortante deste elemento ser linear, o que coincide com o grau de aproximação da função teórica de momento fletor. Por último, ressalta-se que dentre os elementos construídos a partir da teoria de Timoshenko livres de travamento de força cortante, os elementos TQIR, TQCADFC e TGW são aqueles que convergem ao valor analítico com uma malha mais pobre de elementos finitos.

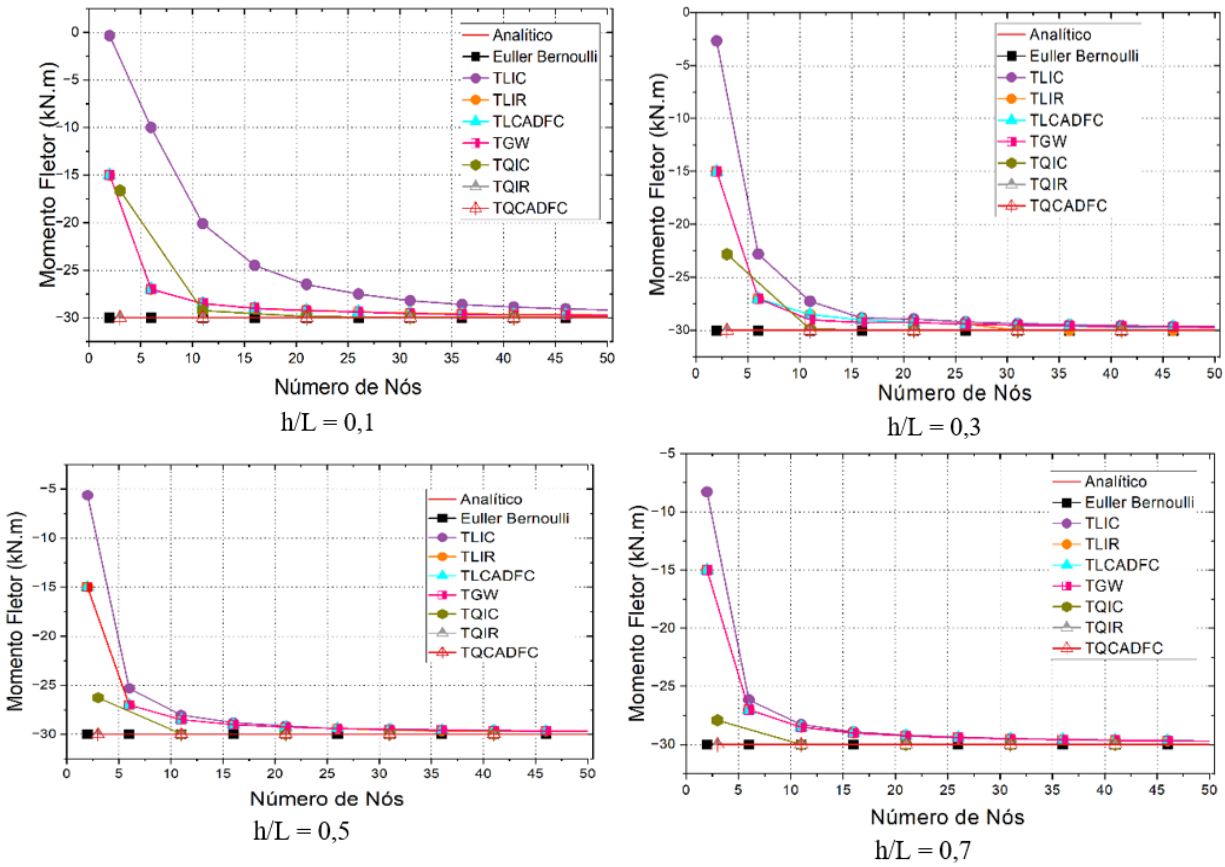

FIGURA 4: Curvas de convergência de malha para o momento fletor.

A **FIGURA 5** apresenta a convergência da força cortante da estrutura em análise. É possível observar que à medida que se aumenta o número de elementos todos os valores tendem a convergir ao valor teórico analítico de 10,0 kN. Neste caso, apenas os elementos finitos de Gere e Weaver, Timoshenko Linear Integração Completa e Timoshenko Quadrático Integração Completa (TGW, TLIC e TQIC) precisaram de uma malha maior para atingir a convergência ao valor analítico, enquanto as demais, para qualquer discretização, já se obtém a convergência. No entanto, os elementos TGW e TQIC convergiram com 21 nós, enquanto o TLIC necessita de um número maior de discretizações.

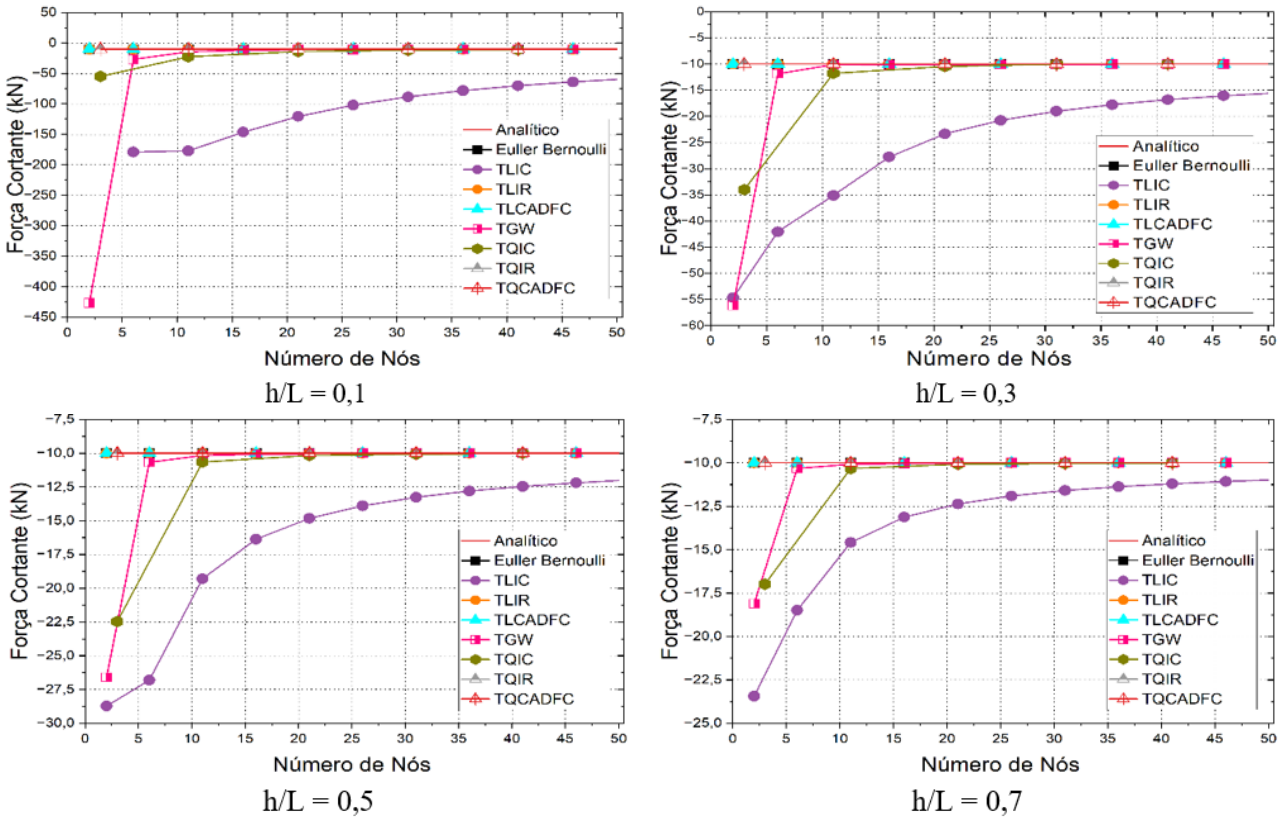

FIGURA 5: Curvas de convergência de malha para a força cortante.

5. CONCLUSÕES

Conforme apresentado no objetivo do presente artigo foi evidenciado na formulação e na análise de resultados deste trabalho a existência do problema de travamento devido a força cortante nos elementos finitos de Timoshenko. Esse problema de travamento foi contornado considerando três métodos distintos, sendo eles através da utilização da integração reduzida seletiva, a formulação via CADFC e por último a formulação de Gere e Weaver.

Diante das análises realizadas, foi possível constatar que, para as relações de h / L observadas, todos os elementos finitos convergem, embora que a taxas diferentes, para os resultados de deslocamentos obtidos analiticamente, à medida que se aumenta a discretização. Ficou evidenciado que os resultados obtidos com os elementos baseados na teoria de Timoshenko com integração numérica completa necessitam de maiores discretizações para se obter os resultados de convergência mais próximos do analítico. Por outro lado, para elementos com formulações livres de travamento os de aproximações quadráticas apresentaram taxas de convergência mais rápidas quando comparado com os resultados obtidos com elementos lineares.

Para o momento fletor, os elementos finitos com Integração Reduzida Seletiva e aproximação quadrática, com Campo Assumido de Deformação de Força Cortante e aproximação quadrática e Gere e Weaver apresentaram os mesmos valores obtidos analiticamente para quaisquer discretizações. Para a força cortante, o mesmo comportamento acontece considerando os elementos com aproximações quadráticas e lineares. Ficando claro que para a estrutura analisada todos estes elementos reproduzem resultados de esforços internos com acurácia e precisão.

Os seguintes temas de pesquisas futuras são sugeridos: estudo do comportamento dinâmico de vigas utilizando as formulações de viga de Timoshenko apresentadas neste artigo; formulação de elementos finitos considerando materiais compostos; incorporação de efeitos térmicos na formulação; aplicação das formulações alternativas apresentadas neste trabalho no desenvolvimento de elementos finitos de viga utilizando a formulação corrotacional com o intuito de se analisar estruturas considerando a não linearidade geométrica e adaptação da formulação apresentada para estruturas de pórtico tridimensionais.

Por último, este artigo apresenta como principais contribuições o conhecimento sobre o problema de travamento de força cortante (*shear locking*), como ele surge na formulação do elemento finito de viga, como ele afeta a qualidade de resposta da estrutura analisada e como este problema pode ser contornado.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil (PPG-GECON) da Universidade Federal de Goiás (UFG) pelo apoio a realização desta pesquisa.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abaqus. 2023. **Software Documentation**.

Albuquerque, A. A. A. 2014. **Implementação de elementos finitos de barra e placa para a análise de esforços em tabuleiros de pontes por meio de superfícies de influência**. Universidade de São Paulo, São Carlos.

Amir, M., K. G. Papakonstantinou, and G. P. Warn. 2020. **A consistent Timoshenko hysteretic beam finite element model**. Int. J. Non. Linear. Mech., 119 (June 2019): 103218. Elsevier Ltd. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.07.003.

Azevedo, A. F. M. 2003. **Método dos elementos finitos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Babu, C. R., and G. Prathap. 1986. **A linear thick curved beam element**. Int. J. Numer. Methods Eng., 23 (7): 1313–1328. https://doi.org/10.1002/nme.1620230709.

Baier-Saip, J. A., P. A. Baier, A. R. de Faria, J. C. Oliveira, and H. Baier. 2020. **Shear locking in one-dimensional finite element methods**. Eur. J. Mech. A/Solids, 79 (October 2019): 103871. Elsevier Masson SAS. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103871.

Bathe, K.-J. 1996. **Finite Element Procedures.** New Jersey: Prentice Hall.

Bickford, W. B. 1990. **A first course in the finite element method**. United States: Richard D. Irwin, Inc.

Bismarck-Nasr, M. N. 1993. **Finite elements in applied mechacnis**. Brazil.

Caillerie, D., P. Kotronis, and R. Cybulski. 2015. **A Timoshenko finite element straight beam with internal degrees of freedom**. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., (39): 1753–1773. https://doi.org/10.1002/nag.2367.

Choi, J., and J. Lim. 1995. **General curved beam elements based on the assumed strain fields**. Comput. Struct., 55 (3): 379–386. https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)98865-N.

Cook, R. D., D. S. Malkus, and M. . Plesha. 1989. **Concepts and applications of finite element analysis**. John Wiley Sons.

Diana. 2023. **Diana documantation and Verification Report**.

Duff, I.S. and Reid, J.K. (1983) **The Multifrontal Solution of Indefinite Sparse Symmetric Linear.** ACM Transactions on Mathematical Software, 9, 302-325.

Ergüven, M. E., and A. Gedikli. 2003. **A mixed finite element formulation for Timoshenko beam on Winkler foundation**. Comput. Mech., 31 (3–4): 229–237. https://doi.org/10.1007/s00466-003-0420-9.

Friedman, Z., and J. B. Kosmatka. 1993. **An improved two-node timoshenko beam finite element**. Comput. Struct., 47 (3): 473–481. https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90243-7.

Gallager, R. H. 1975. **Finite element analysis: fundamentals**. Englewwod Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Gere, J. M., and W. Weaver. 1987. **Análilse de estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara.

Heyliger, P. R., and J. N. Reddy. 1988. **A higher order beam finite element for bending and vibration problems**. J. Sound Vib., 126 (2): 309–326. https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90244-1.

HSL. **A collection of Fortran codes for large scale scientific computation**. Versão 1.0. Oxford. Harwell Subroutine Library, 2011. Disponível em: < https://www.hsl.rl.ac.uk/>

Hsu, Y. S. 2016. **Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis**. Appl. Math. Model., 40 (15–16): 7012–7033. Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.02.042.

Hughes, T. J. R., M. Cohen, and M. Haroun. 1978. **Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates**. Nucl. Eng. Des., 46 (1): 203–222. https://doi.org/10.1016/0029-5493(78)90184-X.

Hughes, T. J. R., and T. E. Tezduyar. 1981. **Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular Reference to the Four-Node Bilinear lsoparametric Element**. J. Appl. Mech., 48 (September): 587–596.

Li, Y., H. Wang, and X. Zheng. 2023. **A viscoelastic Timoshenko Beam Model: Regularity and Numerical Approximation**. J. Sci. Comput., 95 (2): 1–21. Springer US. https://doi.org/10.1007/s10915-023-02187-5.

Lima, A. S. de, and A. R. de Faria. 2016. **A C1 Beam Element Based on Overhauser Interpolation**. Lat. Am. J. Solids Struct., 14: 92–112. https://doi.org/10.1590/1679-78253142.

Liu, G. R., and S. S. Quek. 2003. **Finite Element Method: A Practical Course.** Oxford: Butterworth-Heinemann.

Neves, R. de A. 2000. **Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios, considerando-se a influência das tensões cisalhantes.** Universidade de São Paulo.

Nickel, R. E., and G. A. Secor. 1972. **Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements**. Int. J. Numer. Methods Eng., 5 (2): 243–252. https://doi.org/10.1002/nme.1620050210.

Noor, A. K., and J. M. Peters. 1981. **Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curver beams**. Int. J. Numer. Methods Eng., 17 (4): 615–631. https://doi.org/10.1002/nme.1620170409.

Prathap, G., and G. R. Bhashyam. 1982. **Reduced integration and the shear-flexible beam element**. Int. J. Numer. Methods Eng., 18 (2): 195–210. https://doi.org/10.1002/nme.1620180205.

Rakowski, J. 1990. **The interpretation of the shear locking in beam elements**. Comput. Struct., 37 (5): 769–776. https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90106-C.

Rakowski, J. 1991. **A critical analysis of quadratic beam finite elements**. Int. J. Numer. Methods Eng., 31 (5): 949–966. https://doi.org/10.1002/nme.1620310509.

Reddy, J. N. 1997. **On locking-free shear deformable beam finite elements**. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 149 (1–4): 113–132. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00075-3.

Reddy, J. N. 1999. **On the dynamic behaviour of the Timoshenko beam finite elements**. Sadhana - Acad. Proc. Eng. Sci., 24 (3): 175–198. https://doi.org/10.1007/BF02745800.

Reddy, J. N. 2006. **An Introduction to the Finite Element Method**. Mc Graw Hill.

De Rosa, M. A., M. Lippiello, G. Armenio, G. De Biase, and S. Savalli. 2020. **Dynamic analogy between Timoshenko and Euler–Bernoulli beams**. Acta Mech., 231 (11): 4819–4834. Springer Vienna. https://doi.org/10.1007/s00707-020-02795-4.

Shimodaira, H. 1985. **Equivalence between mixed models and displacement models sing reduced integration**. Int. J. Numer. Methods Eng., 21 (1): 89–104. https://doi.org/10.1002/nme.1620210108.

Soriano, H. L. 2003. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo.

Soydas, O., and A. Saritas. 2013. **An accurate nonlinear 3d Timoshenko beam element based on Hu-Washizu functional**. Int. J. Mech. Sci., 74: 1–14. Elsevier. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.04.002.

Tessler, A., and S. B. Dong. 1981. **On a hierarchy of conforming timoshenko beam elements**. Comput. Struct., 14 (3–4): 335–344. https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90017-1.

Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. 2005. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. Elsevier Butterworth Heinemann.